

1 Introduction

Nous l'avons vu en classe, toute démonstration en mathématiques utilise des prérequis. Prérequis qui doivent, eux aussi être démontrés... une chaîne qui s'arrête aux axiomes des mathématiques. Je vous ai montré les axiomes des probabilités tels qu'ils ont été énoncés par Андрей Колмогоров (Andreï Kolmogorov), dans la langue de l'article d'origine (l'allemand), une traduction en anglais est disponible au bout du lien suivant pour ceux qui sont intéressés :

https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/kolmogorov_foundations.pdf

L'idée de cette activité est, à travers 3 documents de natures différentes, de mieux comprendre cette notion de démonstration, en mathématiques.

1.1 Document 1

Le premier document est une vidéo de 13 minutes de "Monsieur Phi", professeur de philosophie reconverti dans la création vidéo. Sa vidéo s'intitule "Le Scepticisme — Le trilemme d'Agrippa" et est le second épisode d'une suite de 6 vidéos. Il n'est pas obligatoire de regarder l'épisode précédent pour comprendre celui-ci :

<https://www.youtube.com/watch?v=Gqu6Di353ok>

1.2 Document 2

Le second document est une courte vidéo (un peu plus d'une minute) humoristique intitulée "Question à un rabbin : Vous avez 5 minutes pour me prouvez que Dieu existe !" faisant intervenir Rav Yehia Benchetrit.

Comme vous pouvez vous en doutez, il ne s'agit pas d'une réelle démonstration, mais elle fait intervenir le même genre de raisonnements.

<https://www.youtube.com/watch?v=gwydqK9GJew>

1.3 Document 3

Le troisième document est composé de plusieurs extraits de la bande dessinée "Logicomix" d'Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou, Alecos Papadatos et Annie Di Donna (2010 pour l'édition française).

http://www.barsamian.am/S5P6/Logicomix_extraits.pdf

2 Questions

2.1 Document 1

1. Deux types de scepticisme sont présentés. Le scepticisme radical, représenté par Πυρρων (Pyrrhon), et un autre vu comme plutôt scientifique. Qu'en est-il en mathématiques ? Une connaissance mathématique est-elle également "plus ou moins probable" ?
2. Monsieur Phi dit de Pyrrhon qu'il est sceptique quant à son scepticisme même, et qu'en ce sens, il est meta-sceptique. Expliquez la signification de cette expression et donnez d'autres exemples d'utilisation du préfixe "meta".
3. Monsieur Phi définit ce qu'est une connaissance, qu'il oppose à un préjugé mal examiné, même quand il est vrai. Donnez un ou plusieurs exemples (dans le domaine de votre choix) mettant en scène un préjugé faux ; idem pour un préjugé vrai. Selon vous, quel est le statut d'une conjecture en mathématiques ?

4. La troisième structure du trilemme est l'arrêt dogmatique. C'est le cas en mathématiques. En fait les connaissances en mathématiques ne sont pas des vérités absolues. Ce qu'on démontre est seulement vrai dans une théorie donnée. Ainsi, vous avez vu que la somme des angles d'un triangle faisait toujours 180° . Mais... toujours ? Vraiment ?

2.2 Document 2

Dans la vidéo, Rav Yehia Benchetrit fait une démonstration qui est un "argument valide", mais qui ne permet pas forcément de démontrer la conclusion, car il y a des hypothèses (ou prémisses) qui sont ici cachées. Quelles sont les hypothèses qui sont faites ? Est-il vrai que "Si ces hypothèses sont vraies, alors Dieu existe" ?

2.3 Document 3

1. Dans le premier extrait, le jeune Bertrand Russell découvre ce qu'on appelle aujourd'hui le "Cinquième postulat d'Euclide", qui permet de faire de la géométrie euclidienne (!). Quels sont quatre autres postulats ?
2. Dans le second extrait, il est question d'un syllogisme que vous êtes nombreux à connaître. Le raisonnement est parfaitement valide, et de plus, les deux premiers énoncés de départ étant vrais, la conclusion est vraie. Trouvez un exemple de raisonnement valide mais avec un ou plusieurs énoncés de départ faux, ainsi qu'une conclusion fautive. Quel est le nom d'un tel type de raisonnement ?
3. Expliquer l'humour dans le troisième extrait.
4. Dans le quatrième extrait, il est question de géométries non-euclidiennes. Expliquez en quelques mots l'une de ces géométries.
5. Dans le cinquième extrait, on découvre un paradoxe très important, qui a obligé à reformuler la théorie des ensembles. Donner un exemple de réponse qu'on pourrait formuler à la question "Qui rase le barbier ?".
6. Dans le huitième extrait, Gödel montre que "il y aura toujours des questions sans réponse". Il y a donc des résultats "indécidables" dans (presque) toute théorie cohérente, c'est-à-dire qui ne donne pas lieu à des contradictions. Car, dans le cas où la théorie est contradictoire, *ex falso quodlibet*. Expliquez alors la notation $P \wedge \neg P$ dans le comic "Principle of Explosion" : <https://xkcd.com/704/>.

3 Diverses ressources

Si vous avez été intéressés par le sujet, je ne peux que vous recommander de regarder les 6 épisodes de "Monsieur Phi" sur la thématique de la démonstration. L'épisode 4 explique notamment les axiomes de la géométrie euclidienne.

1 : "Comment démontrer n'importe quoi" : <https://www.youtube.com/watch?v=2DOYvDWZWo>

2 : "Le Scepticisme — Le trilemme d'Agrippa" : <https://www.youtube.com/watch?v=Gqu6Di353ok>

3 : "Le Fondationnalisme — Quelle base pour l'édifice des connaissances ?" : <https://www.youtube.com/watch?v=J5dTXVbS3Vg>

4 : "L'axiomatique — Les Éléments d'Euclide" : <https://www.youtube.com/watch?v=enZpq8jvFEs>

5 : "Le paradoxe de Lewis Carroll" : <https://www.youtube.com/watch?v=j5EEHOokkaQ>

6 : "La règle des règles" : <https://www.youtube.com/watch?v=iQ-AWuLk32c>