Travail en groupe n°8 — Mercredi 20 janvier 2021

Exercice 1 — L'algorithme de Héron

Héron d'Alexandrie (1er siècle) est célèbre pour une formule[1] de calcul d'aire d'un triangle (on reviendra sur les triangles cette année, mais la formule est hors programme). Si un triangle a des côtés de longueur a, b et c, et que l'on pose $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (c'est le demi-périmètre), alors l'aire du triangle est

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Une fois cette formule découverte, il ne s'est pas arrêté là : il faut bien calculer, maintenant, une racine carrée : comment faire, dans le cas général ? Comment fait notre calculatrice, d'ailleurs, pour calculer les racines carrées ?

Votre calculatrice exactement, je ne sais pas, mais Héron a trouvé un algorithme très efficace pour calculer les racines carrées, algorithme qui est encore aujourd'hui utilisé sur certaines machines. Voici l'algorithme :

Algorithme de Héron pour calculer $r = \sqrt{x}$.

Variables :
r et x sont deux nombres réels.
n est un nombre entier.

Corps de l'algorithme :
Lire la variable x
Lire la variable r
Lire la variable n
Répéter n fois
    r **prend la valeur** $\dfrac{r+\frac{x}{r}}{2}$
Fin_Répéter
Afficher la variable r

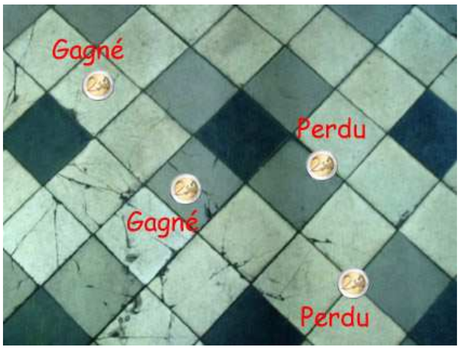
L'algorithme part d'une valeur initiale r qui est une approximation de $\sqrt{x}$ (au pire on n'a vraiment aucune idée, et on peut très bien partir de $r = x$ — même si c'est une très très mauvaise approximation). Ensuite, l'idée est que le rectangle de côtés r et $\dfrac{x}{r}$ a pour aire x. Donc, si on arrive à "carréiser" ce rectangle (faire qu'il soit de plus en plus proche d'un carré) tout en conservant son aire, alors on va finir par arriver sur un carré d'aire x... donc de côté $\sqrt{x}$.

L'idée de Héron est donc la suivante : je sais que la moyenne de la largeur et de la longueur de ce rectangle (donc, $\dfrac{r+\frac{x}{r}}{2}$) est un nombre plus grand que la largeur et plus petit que la longueur. Donc, en choisissant ce nouveau nombre comme l'un des côtés d'un nouveau rectangle, ce rectangle sera "plus carré" que le précédent. D'où l'algorithme.

1. Pour les valeurs saisies $x = 10$, $r = 10$ et $n = 3$, quel est le nombre affiché ? Faire des dessins successifs (échelle : 1 cm pour 1) détaillant les différents rectangles qui sont associés aux calculs faits par l'algorithme.
2. Pour les valeurs saisies $x = 10$ et $r = 10$, quelle valeur minimale doit-on saisir pour n pour que l'algorithme affiche une valeur approchée de $\sqrt{10}$ avec 8 décimales exactes ?

1. Pour ceux qui s'intéressent à l'informatique, il est intéressant de noter que, pour des triangles quasiment plats (donc, d'aire presque nulle), cette formule, à l'aide d'un ordinateur, donne lieu à trop d'erreurs d'arrondis.

Exercice 2 — Le franc carreau

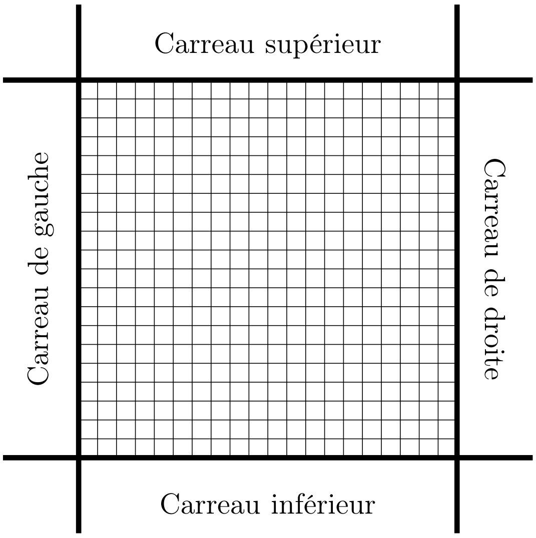


Monsieur Barsamian décide de jouer au jeu du franc-carreau [2] dans sa salle de bains. Ce jeu consiste à lancer une pièce sur un sol carrelé. Lorsque la pièce s'est arrêtée sur le sol, on gagne si la pièce tient toute entière sur un seul carreau et on perd si elle est à cheval sur deux carreaux ou plus.

Pour le jeu, monsieur Barsamian a utilisé une pièce de 2€ de 2,5 cm de diamètre lancée sur un sol constitué de carreaux de 5 cm de côté. Le résultat des lancers est dans le tableau ci-dessous :

Nombre de lancers	10	50	100	500	1000	5000
Nombre de lancers gagnants	1	12	31	113	244	1242

1. Calculer, pour chaque colonne, la fréquence de lancers gagnants.
2. Estimer, à l'aide de ces lancers, la probabilité de faire un lancer gagnant, en expliquant votre choix.



On décompose maintenant chacun des carreaux de la salle de bains en carrés élémentaires de 0,25 cm de côté. On supposera alors qu'il y a équiprobabilité : lorsque la pièce est lancée, le centre de la pièce a autant de chances de tomber dans un carré élémentaire que dans n'importe quel autre. Nous pouvons maintenant calculer de manière exacte la probabilité de gagner.

3. En s'aidant du dessin d'un carreau ci-contre (le dessin est à l'échelle 1 :1) et en étudiant les cas possibles, trouver la probabilité exacte de gagner.
4. Proposer un algorithme permettant de simuler 100 lancers, et qui donne en sortie le nombre de lancers gagnants.

Exercice 3 — Le 29 février

Pouvez-vous estimer le nombre de personnes belges nées un 29 février ?

2. Inventé en 1733 par Georges Louis Leclerc, comte de Buffon, très populaire à la Cour.