Il s'agit de la correction d'exercices de la feuille suivante :
`http://www.barsamian.am/S6P3/Chap6_Derivees_exos.pdf`

Pour bien comprendre les méthodes nécessaires à ce chapitre, vous pouvez aller voir 4 courtes vidéos d'Yvan Monka :

- Nombre dérivé et équation de la tangente, graphiquement : `https://www.youtube.com/watch?v=0jhxK55jONs`.
- Dériver une fonction (exemples simples) : `https://www.youtube.com/watch?v=uTk3T_GfwYo`.
- Dériver une fonction (polynôme de degré 2) : `https://www.youtube.com/watch?v=5WDIrv_bEYE`.
- Dériver une fonction (polynôme de degré 3) : `https://www.youtube.com/watch?v=1fOGueiO_zk`.

Exercice 3

1. $f(x) = 2$: c'est une fonction constante, la dérivée c'est $\boxed{f'(x) = 0}$.
2. $f(x) = 3x + 1$: c'est une fonction affine (la courbe est une droite), la dérivée c'est le coefficient directeur : $\boxed{f'(x) = 3}$.
3. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

   $f(x) = 3 \times x^2 + 4 \times x + 1.$

   $f'(x) = 3 \times 2x + 4 \times 1 + 0.$

   $\boxed{f'(x) = 6x + 4}$.
4. $f(x) = 0,25x^2 - 0,75x + 2$

   $f(x) = 0,25 \times x^2 - 0,75 \times x + 2.$

   $f'(x) = 0,25 \times 2x - 0,75 \times 1 + 0.$

   $\boxed{f'(x) = 0,5x + 0,75}$.
5. $f(t) = t^2 - 2t + 3$

   $f(t) = t^2 - 2 \times t + 3.$

   $f'(t) = 2t - 2 \times 1 + 0.$

   $\boxed{f'(t) = 2t - 2}$.
6. $f(t) = -2t^2 + 6t + 1$

   $f(t) = -2 \times t^2 + 6 \times t + 1.$

   $f'(t) = -2 \times 2t + 6 \times 1 + 0.$

   $\boxed{f'(t) = -4t + 6}$.
7. $f(t) = \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{t}{4} - 2$

   $f(t) = \dfrac{1}{3} \times t^2 + \dfrac{1}{4} \times t - 2.$

   $f'(t) = \dfrac{1}{3} \times 2t + \dfrac{1}{4} \times 1 - 0.$

   $\boxed{f'(t) = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{4}}$.

8. $f(x) = -3x(-x+1)$

   Ici, d'abord on développe : $f(x) = -3x \times (-x) - 3x \times 1 = 3x^2 - 3x$ (on vérifie à la calculatrice en tapant $expand(-3x \cdot (-x+1), x)$). Une fois qu'on a développé, on peut appliquer la technique précédente.

   $f(x) = 3 \times x^2 - 3 \times x.$

   $f'(x) = 3 \times 2x - 3 \times 1.$

   $\boxed{f'(x) = 6x - 3}.$

9. $f(x) = (4x+1)(-2x+1)$

   Ici, d'abord on développe : $f(x) = 4x \times (-2x) + 4x \times 1 + 1 \times (-2x) + 1 \times 1 = -8x^2 + 4x - 2x + 1 = -8x^2 + 2x + 1$ (on vérifie à la calculatrice en tapant $expand((4x+1) \cdot (-2x+1), x)$). Une fois qu'on a développé, on peut appliquer la technique précédente.

   $f(x) = -8 \times x^2 + 2 \times x + 1.$

   $f'(x) = -8 \times 2x + 2 \times 1 + 0.$

   $\boxed{f'(x) = -16x + 2}.$

10. $f(t) = (2t+7)^2$

    Ici, d'abord on développe : (a) on peut reconnaître une identité remarquable $f(t) = (2t)^2 + 7^2 + 2 \times (2t) \times 7$ ou alors (b) on peut faire la double distributivité $f(t) = (2t+7)(2t+7) = 2t \times 2t + 2t \times 7 + 7 \times 2t + 7 \times 7 = 4t^2 + 14t + 14t + 49 = 4t^2 + 28t + 49$ (on vérifie à la calculatrice en tapant $expand((2t+7)^2, t)$). Une fois qu'on a développé, on peut appliquer la technique précédente.

    $f(t) = 4 \times t^2 + 28 \times t + 49.$

    $f'(t) = 4 \times 2t + 28 \times 1 + 0.$

    $\boxed{f'(t) = 8t + 28}.$

11. $f(x) = x^3 - 3x$

    $f(x) = x^3 - 3 \times x.$

    $f'(x) = 3x^2 - 3 \times 1.$

    $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3}.$

12. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 2$

    $f(x) = \dfrac{1}{3} \times x^3 - \dfrac{1}{2} \times x^2 + x + 2.$

    $f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 - \dfrac{1}{2} \times 2x + 1 + 0.$

    $\boxed{f'(x) = x^2 - x + 1}.$

Exercice 5 — Équation de la tangente.

1. $f(x) = -4x^2 + 6x + 1$, et $a = 1$

   Pour calculer $f'(1)$, on va démarrer par calculer l'expression de $f'(x)$:

   $f(x) = -4 \times x^2 + 6 \times x + 1.$

   $f'(x) = -4 \times 2x + 6 \times 1 + 0.$

   $f'(x) = -8x + 6.$

Donc on calcule $f'(1) = -8 \times 1 + 6 = \boxed{-2}$.

(b) On a $f'(1) = -2$, ainsi l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 s'écrit $y = -2x + p$.
Pour écrire l'équation de la tangente, on peut utiliser le fait que le point $(1; f(1))$ est sur la tangente, puisque c'est le point de la courbe, justement, par lequel la tangente frôle la courbe.
On calcule $f(1) = -4 \times 1^2 + 6 \times 1 + 1 = -4 + 6 + 1 = 3$. Donc, le point $(1; 3)$ est sur la tangente, ainsi on peut écrire :
$3 = -2 \times 1 + p$ c'est-à-dire $5 = p$. L'équation de la tangente est donc $\boxed{y = -2x + 5}$.

(c) On vérifie avec $tangentLine(-4x^2 + 6x + 1, x, 1)$ qui donne bien la même équation.

À présent, plutôt que d'utiliser cette méthode, on va utiliser la formule de la diapositive 12 du cours :
`http://www.barsamian.am/S6P3/Chap6_diaporama.pdf`

Cette formule $\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$ est indispensable à apprendre, et elle simplifie les calculs. On s'est bien entraînés à calculer des équations de droite, mais on peut désormais utiliser la formule pour gagner du temps. Je vous demande donc de refaire le 2) 3) et 4) de cet exercice 5, à me rendre sur teams ce vendredi 26 février, en utilisant cette formule. Je rappelle qu'un exercice corrigé est disponible en vidéo :
`https://www.youtube.com/watch?v=8GUkUdAD4FA`

2. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}x + 2$, et $a = 3$
3. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2$, et $a = 3$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$, et $a = -2$

Exercice 7 — Équation de la tangente.

7. On commence par calculer la dérivée :

$$f(x) = -7 \times x^2 + 14 \times x + 3.$$
$$f'(x) = -7 \times 2x + 14 \times 1 + 0.$$

$\boxed{f'(x) = -14x + 14}$.

(bien sûr, on vérifie à la calculatrice avec $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$)
Ensuite, on calcule le tableau de signes de cette fonction. C'est une fonction du 1er degré, on peut résoudre à la main, en résolvant > 0 pour trouver la place du "+" par exemple :

$-14x + 14 > 0$ On retranche 14 de chaque côté
$-14x > -14$ On divise par -14 de chaque côté (et on change le sens de l'inéquation du coup, car on a
$x < 1$

(bien sûr, on vérifie à la calculatrice avec $solve(-14x + 14 > 0, x)$)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var $f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\infty$

(pour trouver les valeurs à mettre dans la ligne des variations de f, on calcule la limite de f en $-\infty$, celle en $+\infty$, et la valeur de f en $x = 1$)

8. On commence par calculer la dérivée :

$$f(x) = 4 \times x^2 + 3 \times x - 17.$$
$$f'(x) = 4 \times 2x + 3 \times 1 - 0.$$

$\boxed{f'(x) = 8x + 3}$.

(bien sûr, on vérifie à la calculatrice avec $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$)

Ensuite, on calcule le tableau de signes de cette fonction. C'est une fonction du 1er degré, on peut résoudre à la main, en résolvant > 0 pour trouver la place du "+" par exemple :

$$\begin{aligned} 8x + 3 &> 0 && \text{On retranche 3 de chaque côté} \\ 8x &> -3 && \text{On divise par 8 de chaque côté} \\ x &> -\frac{3}{8} (= -0,375) \end{aligned}$$

(bien sûr, on vérifie à la calculatrice avec $solve(8x + 3 > 0, x)$)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{8}$		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var $f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{281}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

(pour trouver les valeurs à mettre dans la ligne des variations de f, on calcule la limite de f en $-\infty$, celle en $+\infty$, et la valeur de f en $x = -\frac{3}{8}$)

9. On commence par calculer la dérivée :

$f(x) = 7 \times x^2 - 14 \times x + 7.$

$f'(x) = 7 \times 2x - 14 \times 1 + 0.$

$\boxed{f'(x) = 14x - 14}$.

(bien sûr, on vérifie à la calculatrice avec $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$)

Ensuite, on calcule le tableau de signes de cette fonction. C'est une fonction du 1er degré, on peut résoudre à la main, en résolvant > 0 pour trouver la place du "+" par exemple :

$$\begin{aligned} 14x - 14 &> 0 && \text{On ajoute 14 de chaque côté} \\ 14x &> 14 && \text{On divise par 14 de chaque côté} \\ x &> 1 \end{aligned}$$

(bien sûr, on vérifie à la calculatrice avec $solve(14x - 14 > 0, x)$)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var $f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(pour trouver les valeurs à mettre dans la ligne des variations de f, on calcule la limite de f en $-\infty$, celle en $+\infty$, et la valeur de f en $x = 1$)