Énoncés des exercices, tirés du bac : exercices numéros 12, 33, 144, 150, 162, 174, 175 et 184, voir : `http://www.barsamian.am/2021-2022/S7P3/S7P3_Tous_les_bacs.pdf`.

Exercice 12

	À 22h00, la température d'une pièce est de 20°C. À cette heure, on éteint le chauffage dans la pièce. La température $f(t)$ de la pièce après 22h00 est donnée par $$f(t) = 9\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 11$$ où t est le nombre d'heures après 22h00 et $f(t)$ est exprimée en °C.
3 points	1. Calculer la température à minuit et à 7h00 le lendemain matin.
3 points	2. Déterminer $f'(t)$ et démontrer que f est une fonction décroissante.
3 points	3. Déterminer $f'(2)$. Que nous révèle ce résultat à propos de la température de la pièce ?
3 points	4. À quelle heure de la matinée la température tombera-t-elle sous 15°C ?
	L'énergie (en kWh) dissipée à l'extérieur de la pièce entre t_1 et t_2 est donnée par $$\int_{t_1}^{t_2} 0,70 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12t}\,\mathrm{dt}\,.$$
3 points	5. Calculer l'énergie dissipée à l'extérieur de la pièce de 22h00 à 7h00 le lendemain matin.

1. Température à minuit : $f(2) = 9\mathrm{e}^{-0{,}12\times 2} + 11 \approx \boxed{18,0797}$ (en °C).

   Température à 7h00 le lendemain matin : $f(9) = 9\mathrm{e}^{-0{,}12\times 9} + 11 \approx \boxed{14,0564}$ (en °C).

2. On peut utiliser la calculatrice en définissant tout d'abord $f(t) := 9\mathrm{e}^{-0{,}12\cdot t} + 11$ puis en calculant la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t))$. On peut aussi le faire à la main :

   $f(t) = 9 \times \mathrm{e}^{-0{,}12t} + 11.$

   $f'(t) = 9 \times (-0,12 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12t}) + 0.$

   $\boxed{f'(t) = -1,08\mathrm{e}^{-0{,}12t}}$.

   1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

   2 : Dériver : dans chaque terme garder la constante et dériver la fonction de référence.

   3 : Simplifier.

3. $f'(2) = -1,08\mathrm{e}^{-0{,}12\times 2} \approx \boxed{-0,849558}$. Cela signifie qu'à minuit ($t = 2$), la température de la pièce diminue d'environ $0,85$°C par heure.

4. Ici on demande quand la fonction devient plus petite que 15. On peut simplement demander à la calculatrice solve($f(t) < 15, t$), ou bien on peut résoudre à la main :

$$\begin{array}{rcll}
f(t) & < & 15 & \\
9\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 11 & < & 15 & \text{On remplace par l'expression} \\
9\mathrm{e}^{-0{,}12t} & < & 4 & -11 \\
\mathrm{e}^{-0{,}12t} & < & \dfrac{4}{9} & \div 9 \\
\ln\left(\mathrm{e}^{-0{,}12t}\right) & < & \ln\left(\frac{4}{9}\right) & \text{On utilise ln} \\
-0,12t & < & \ln\left(\frac{4}{9}\right) & \text{On simplifie} \\
t & > & \dfrac{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}{-0,12} & \div(-0,12)\text{, on inverse le sens de l'inégalité car } -0,12 \text{ est négatif !}
\end{array}$$

   On trouve que c'est donc vrai quand t est plus grand qu'environ $6,75775$, c'est-à-dire 6h et trois quarts d'heure après 22h, donc $\boxed{\text{à partir de 4h45 du matin}}$.

5. On peut utiliser la calculatrice en calculant l'intégrale $\displaystyle\int_0^9 0,70 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12t}\,\mathrm{dt} \approx \boxed{3,85236}$ (en KWh).

   On peut aussi faire le calcul de l'intégrale à la main :

$g(t) = 0,7 \times \mathrm{e}^{-0{,}12t}$.

$G(t) = 0,7 \times \dfrac{1}{-0,12} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12t}$.

$G(t) = -\frac{0{,}7}{0{,}12}\mathrm{e}^{-0{,}12t} = -\frac{70}{12}\mathrm{e}^{-0{,}12t} = \boxed{-\frac{35}{6}\mathrm{e}^{-0{,}12t}}$.

1 : Ecrire chaque terme de g comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Intégrer : dans chaque terme garder la constante et intégrer la fonction de référence.

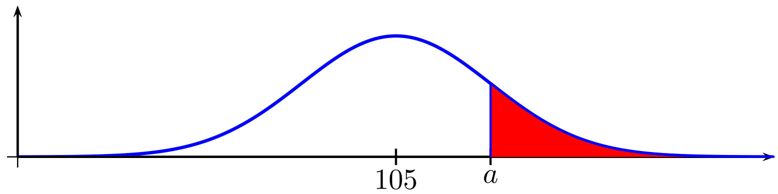
3 : Simplifier.

Du coup $\displaystyle\int_0^9 0,70 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12t}\,\mathrm{d}t = G(9) - G(0) = -\frac{35}{6}\mathrm{e}^{-0{,}12\times 9} - \left(-\frac{35}{6}\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0}\right) = \boxed{-\frac{35}{6}\mathrm{e}^{-1{,}08} + \frac{35}{6}}$.

Exercice 33

	Dans un entrepôt il y a un très grand stock de pommes. Le poids d'une pomme est distribué normalement avec $\mu = 105$ g et $\sigma = 5,4$ g. Le gardien de l'entrepôt prend au hasard une pomme du stock.
3 points	1. Calculer la probabilité que le poids de cette pomme soit compris entre 90 g et 115 g.
3 points	2. Calculer la probabilité que le poids de cette pomme soit supérieur à 110 g.
4 points	3. On considère les 15% des pommes les plus lourdes du stock. Calculer le minimum de leurs poids.
	L'expérience montre que 5% des pommes ne sont pas assez belles pour être vendues.
5 points	4. Quelqu'un prend au hasard 80 pommes du stock. Calculer la probabilité qu'il ait pris plus de 5 pommes qui ne peuvent être vendues.

1. On demande à la calculatrice $\mathrm{normCdf}(90, 115, 105, 5.4)$ et la calculatrice répond $\boxed{0,96524}$.
2. On demande à la calculatrice $\mathrm{normCdf}(110, \infty, 105, 5.4)$ et la calculatrice répond $\boxed{0,177242}$.
3. On va ici faire un dessin :



   On sait que l'aire rouge vaut $0,15$, et on cherche la valeur de a. C'est donc la valeur a telle que $\mathrm{normCdf}(a, \infty, 105, 5.4) = 0.15$. On peut donc simplement taper $\mathrm{solve}(\mathrm{normCdf}(a, \infty, 105, 5.4) = 0.15, a)$ et la calculatrice donne $\boxed{110,597}$.
4. Il y a tellement de pommes qu'on peut faire l'approximation que le tirage des pommes est avec remise (alors que, bien sûr, c'est sans remise) : c'est-à-dire que la probabilité que chaque pomme ne puisse pas être vendue reste la même, de la 1e à la 80e pomme. Ainsi, on peut modéliser l'expérience par une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,05$ car il s'agit de la répétition à l'identique et de manière indépendante de la même expérience. Si on note X la variable aléatoire du nombre de pommes ne pouvant pas être vendues, on veut donc $P(X > 5)$, c'est-à-dire $P(X \geq 6)$.
   On demande donc à la calculatrice $\mathrm{binomCdf}(80, 0.05, 6, 80)$ et on obtient $\boxed{0,210775}$.

Exercice 144

5 points	Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(3\mathrm{e}^{2x} + x\right)\mathrm{d}x$.

Pour faire le calcul, on démarre par trouver une primitive :

$f(x) = 3 \times \mathrm{e}^{2x} + x$.

$F(x) = 3 \times \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{2x} + \dfrac{x^2}{2}$.

$\boxed{F(t) = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{x^2}{2}}$.

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

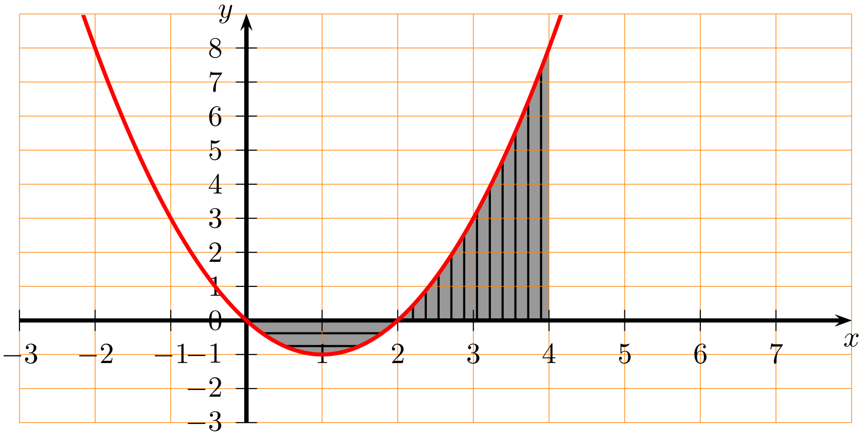
2 : Intégrer : dans chaque terme garder la constante et intégrer la fonction de référence.

3 : Simplifier.

Du coup $\displaystyle\int_0^1 \left(3\mathrm{e}^{2x} + x\right)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2\times 1} + \frac{1^2}{2} - \left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2\times 0} + \frac{0^2}{2}\right) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 - 1}$.

Exercice 150

Sur le diagramme ci-dessous l'aire de la surface grisée est 8 et on sait de plus que $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{20}{3}$.



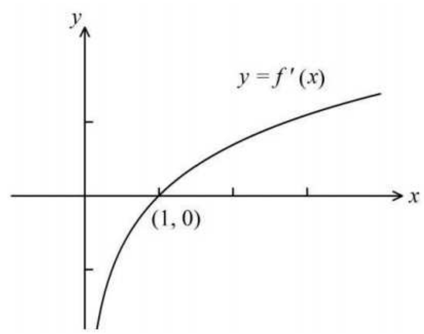
5 points — Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Justifier la réponse.

La fonction est négative sur $[0;2]$ donc l'aire hachurée horizontalement vaut $\displaystyle -\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. La fonction est positive sur $[2;4]$ donc l'aire hachurée verticalement vaut $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Au total :

$$\begin{aligned}
-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= 8 && \text{Car } \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{20}{3}\\
-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{20}{3} &= 8 && -\frac{20}{3} \text{ et même dénominateur}\\
-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{24}{3} - \frac{20}{3} && \text{Simplification et multiplication par } -1\\
\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \boxed{-\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

Exercice 162

Le diagramme ci-dessous montre le graphique de la dérivée f' d'une fonction f.



5 points — Déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un extremum et spécifier la nature de celui-ci. Justifier la réponse.

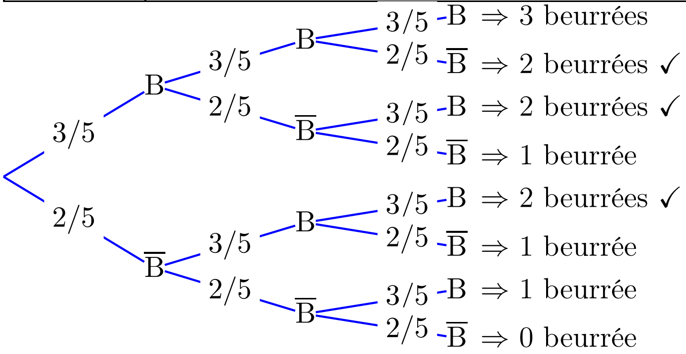
On lit graphiquement le signe de f' pour en déduire les variations de f :

x	0		1		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var f		↘		↗	

Ainsi f a un $\boxed{\text{minimum}}$ à l'abscisse $\boxed{1}$.

Exercice 174

5 points	Des tranches identiques de pain grillé sont beurrées d'un seul côté. On sait, par expérience, que si une tranche de pain grillé tombe par terre, la probabilité qu'elle tombe sur le côté beurré est de $\frac{3}{5}$. 3 tranches de pain grillé tombent par terre. Calculer la probabilité qu'exactement 2 de ces tranches tombent sur le côté beurré.



On note B l'événement “la tranche tombe sur le côté beurré”.
L'événement demandé est sur trois branches qui sont toutes de même probabilité, du coup :
$p = 3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5} = 3\times\frac{9}{25}\times\frac{2}{5} = \boxed{\frac{54}{125}}$.

Exercice 175

5 points	Dans une bibliothèque, il y a 40 romans policiers. Dans chaque roman, il y a exactement un assassin. Un quart de ces romans sont écrits par des femmes. Dans exactement 8 romans écrits par des femmes, l'assassin est une femme. Dans exactement 8 romans écrits par des hommes, l'assassin est une femme. Expliquer pourquoi les événements « l'auteur est une femme » et « l'assassin est une femme » ne sont pas indépendants.

On va remplir un tableau à double entrée pour modéliser la situation.

Auteur / Assassin	Homme	Femme	Total
Homme	22	2	24
Femme	8	8	16
Total	30	10	40

Clairement la probabilité que l'assassin soit une femme dépend du genre de l'auteur : si c'est une auteure, c'est avec probabilité $\frac{8}{10}$, et si c'est un auteur, c'est de probabilité $\frac{8}{30}$.

Exercice 184

5 points	Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On donne : $n = 4$ et $E(X) = 2$. Calculer $P(X \geq 1)$.

On sait que, pour une loi binomiale, $E(X) = n{\cdot}p$, donc $2 = 4 \cdot p$ et ainsi $\boxed{p = 0,5}$.
Comme $n = 4$, la variable X prend des valeurs entre 0 et 4, du coup $X \geq 1$ c'est pareil que $X = 1$, 2, 3, ou 4.
On peut dessiner un arbre (à droite, avec S pour succès, E pour échec), où je n'ai pas noté les probabilités qui sont toutes égales à $0,5$.
15 des 16 branches sont à prendre en compte, chacune de probabilité $0,5^4$, d'où :
$P(X \geq 1) = 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 15 \times \frac{1}{16} = \boxed{\frac{15}{16}}$.
PS : On peut aussi appliquer la formule du formulaire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C(4,0) \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$. C'est évidemment plus difficile d'écrire correctement ce calcul…