

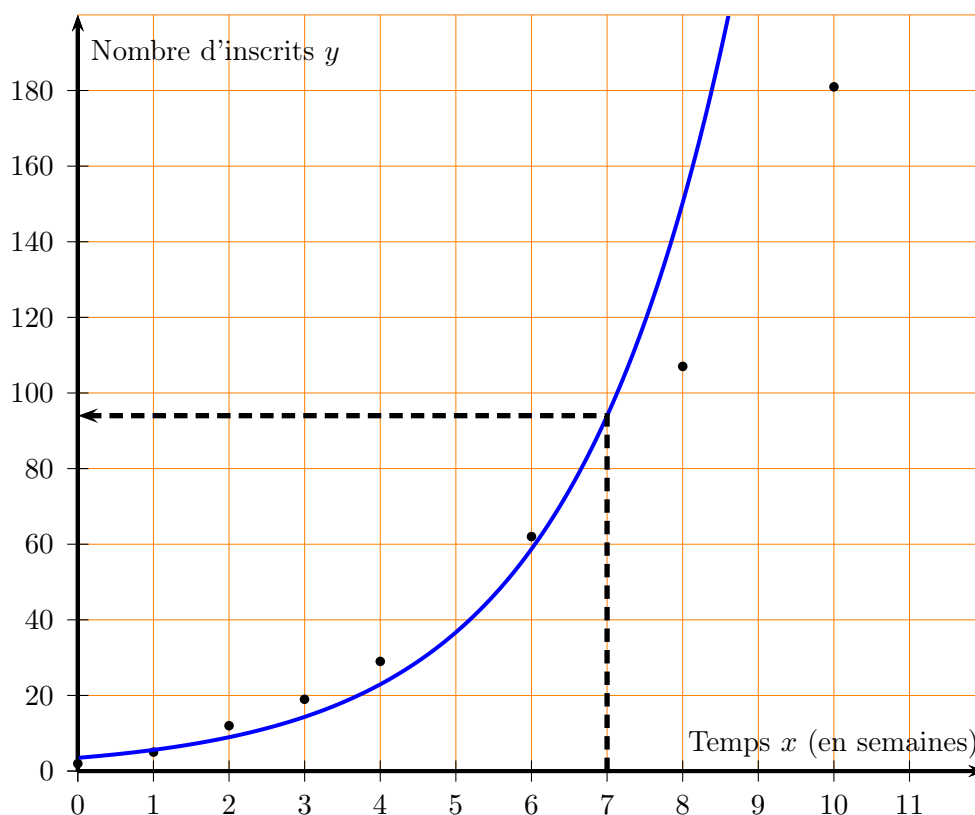
Exercice 1

10 points

Vos professeurs de S7 viennent de créer un forum de discussion. Grâce au bouche à oreille, le nombre d'inscrits évolue très rapidement. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'inscrits en fonction du temps écoulé depuis la création du forum :

Temps x (en semaines)	0	1	2	3	4	6	8	10
Nombre d'inscrits y	2	5	12	19	29	62	107	181
$z = \ln(y)$	0,69	1,61	2,48	2,94	3,37	4,13	4,67	5,20

1. L'axe des x va de 0 à 10, on peut prendre 1 cm pour 1 semaine. L'axe des y va de 2 à 181, on peut prendre 1 cm pour 20 inscrits. On obtient le nuage de points suivant. J'en ai profité pour tracer également la fonction donnée pour les questions 6-7 (ce qui n'était pas demandé) afin de lire graphiquement pour la question 6 (pour la question 7 par contre c'est en dehors du graphique).



2. Les valeurs de $z = \ln(y)$ sont données dans le tableau récapitulatif en haut.
3. À la calculatrice, on demande de faire une régression linéaire (Menu -> Statistiques -> Calcul statistique -> Ajustement linéaire ($mx+b$)). Le coefficient de corrélation linéaire r (coefficient de Bravais-Pearson) de z en x est de $0,97$. L'approximation linéaire est donc tout à fait justifiée.
4. Sans rien faire de plus (on a déjà fait la régression pour calculer r à la question d'avant), la calculatrice donne $z = 0,4x + 1,3$.
5. On se souvient que $z = \ln(y)$. Du coup :

$$\begin{array}{lcl}
 z & = & 0,4x + 1,3 \\
 \ln(y) & = & 0,4x + 1,3 \\
 e^{\ln(y)} & = & e^{0,4x+1,3} \\
 y & = & e^{0,4x+1,3}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Car } z = \ln(y) \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{On passe à l'exponentielle} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Car } e^{\ln(y)} = y
 \end{array}$$

À partir de maintenant, on utilisera la relation $y = 3,5 \times 1,6^x$ pour modéliser le nombre d'inscrits sur le forum en fonction du nombre de semaines depuis la création du forum.

- On demande de faire une interpolation avec $x = 7$. On calcule donc simplement $y = 3,5 \times 1,6^7 \approx \boxed{94}$ (on arrondit à l'unité puisqu'il s'agit d'un nombre d'inscrits). J'ai laissé les traits de construction sur le graphique qui permettent également de retrouver cela.
- Cette fois-ci c'est l'inverse, on connaît y et on cherche x , on peut donc demander à la calculatrice $\text{solve}(3.5 \cdot 1.6^x = 500, x)$ et elle répond $x = 10.557$ donc $\boxed{10 \text{ semaines et demi}}$ après sa création.

Exercice BONUS

+1,5 point

La direction de l'école décide de lancer un autre forum, suite à cette initiative. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'inscrits en fonction du temps écoulé depuis la création du forum :

Temps x (en semaines)	2	3	4	6	8	9	10	12
Nombre d'inscrits y	56	61	72	95	150	207	312	560

- Établir l'équation de la droite de Mayer de y en x .
 - Établir une équation de la forme $y = a \cdot b^x$ de la régression exponentielle de y en x .
- Les données sont déjà triées. Pour les 4 premiers points et les 4 derniers, on calcule le point moyen :

$$\begin{cases} x_{G_1} = \frac{2+3+4+6}{4} = 3,75 \\ y_{G_1} = \frac{56+61+72+95}{4} = 71 \end{cases} \Rightarrow G_1(3,75; 71)$$

$$\begin{cases} x_{G_2} = \frac{8+9+10+12}{4} = 9,75 \\ y_{G_2} = \frac{150+207+312+560}{4} = 307,25 \end{cases} \Rightarrow G_2(9,75; 307,25)$$

Pour trouver l'équation $y = ax + b$ de la droite (G_1G_2) , on commence par calculer le coefficient directeur $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{307,25 - 71}{9,75 - 3,75} = 39,375$.

Pour trouver b on utilise un point de la droite, G_1 ou G_2 . Par exemple si on prend G_1 :

$$\begin{array}{rcl} y_{G_1} & = & 39,375 \times x_{G_1} + b \\ 71 & = & 39,375 \times 3,75 + b \quad \left. \begin{array}{l} \text{On remplace par les valeurs} \\ \leftarrow \end{array} \right\} \\ 71 - 39,375 \times 3,75 & = & b \quad \left. \begin{array}{l} \text{On soustrait de chaque côté} \\ \leftarrow \end{array} \right\} \\ -76,65625 & = & b \quad \left. \begin{array}{l} \text{On effectue le calcul} \\ \leftarrow \end{array} \right\} \end{array}$$

Une équation de la droite de Mayer est donc $\boxed{y = 39,375x - 76,65625}$.

- À la calculatrice, on demande de faire une régression exponentielle (Menu -> Statistiques -> Calcul statistique -> Régression exponentielle). La calculatrice répond :

$$\boxed{29,4 \times 1,26^x}$$