Cours

3 Ajustement exponentiel

Parfois le nuage de points de la série statistiques (x,y) a une forme générale qui ressemble à la **courbe d'une fonction exponentielle** $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$

Pour déterminer l'expression de la fonction dont la courbe représentative approche au mieux le nuage de points on effectue un **changement de variable, en posant $y' = \ln(y)$** .

Le nuage de points de la série statistique (x, y') présente alors une **forme rectiligne** que l'on peut ajuster par la **droite de régression de y'** en x, d'équation $y' = ax + b$.

On a alors $\ln(y) = ax + b$ ce qui équivaut à $y = \mathrm{e}^{ax+b}$.

Cette équation représente une courbe exponentielle qui ajuste au mieux le nuage.

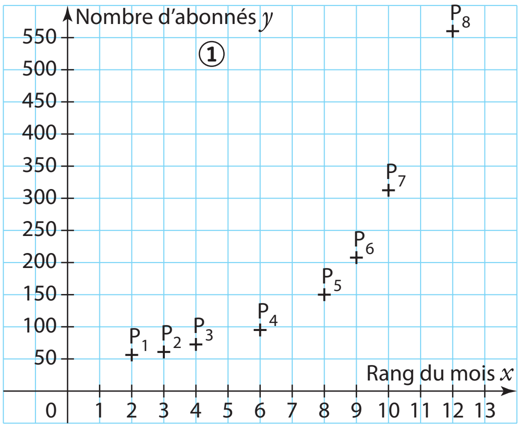
On dit alors qu'on a réalisé un **ajustement exponentiel**.

Exemple

On a étudié l'évolution presque tous les mois du nombre d'abonnés à la chaîne d'une youtubeuse depuis l'ouverture de celle-ci en septembre 2019.

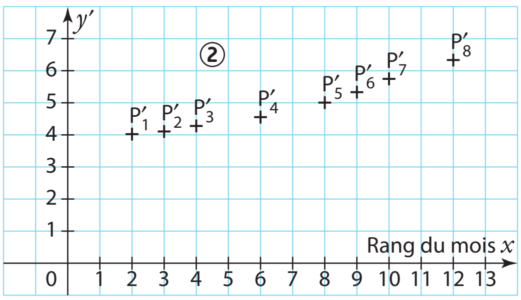
Mois	Nov.	Déc.	Janv.	Mars	Mai	Juin	Juillet	Sept.
Rang du mois x_i	2	3	4	6	8	9	10	12
Nombre d'abonnés y_i	56	61	72	95	150	207	312	560

• Les points $P_i(x_i\,;y_i)$ de la série statistique (x, y) ne présentent pas une forme rectiligne.
Un ajustement affine du nuage n'est donc pas pertinent.
En revanche, on observe une forme de nuage caractéristique d'une évolution exponentielle (graphe ①).



• Si on considère maintenant les variables x et $y' = \ln(y)$, on obtient le tableau de valeurs ci-dessous et le nuage suivant (graphe ②).

x_i	2	3	4	6	8	9	10	12
$y'_i = \ln(y_i)$	4	4,1	4,3	4,6	5	5,3	5,7	6,3



• Les points semblent quasi alignés : on peut donc effectuer un ajustement affine de la série statistique (x, y').

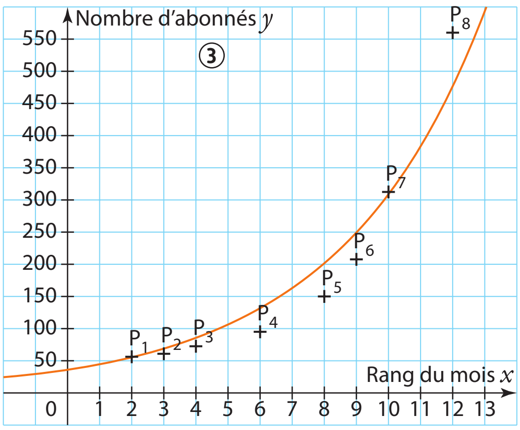
La méthode des moindres carrés donne :

$$y' = 0{,}23x + 3{,}38$$

On a alors :

$\ln(y) = 0{,}23x + 3{,}38 \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^{0{,}23x + 3{,}38}$

La courbe d'équation : $y = \mathrm{e}^{0{,}23x + 3{,}38}$ ainsi obtenue ajuste au mieux le nuage de points P_i de la série statistique (x, y) initiale (graphe ③).



Remarque Cette méthode d'ajustement ne fonctionne que si la variable y ne prend que des valeurs positives.
Dans les autres cas il faudra réaliser un changement de variable un peu différent.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c09-04 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Effectuer un ajustement exponentiel

Énoncé

On a relevé, pendant un an, sur différents parcours de même longueur, la vitesse moyenne x_i des véhicules et le nombre d'accidents mortels y_i au total sur l'année, pour i entier variant de 1 à 5.

Vitesse x_i (en km·h^{-1})	30	50	80	90	100
Nombre d'accidents y_i	1	6	41	66	102

1. Représenter ces données dans un repère orthogonal d'unités bien choisies.

2. On pose $y'_i = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 1 à 5. Calculer les valeurs de y'_i arrondies au dixième.

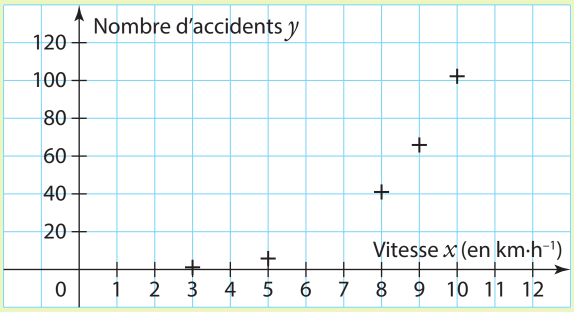
3. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y'_i)$ dans un autre repère et vérifier que sa forme peut être ajustée par une droite.

4. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x. (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).

5. En déduire une expression de y en fonction de x.

Solution

1. On obtient le nuage suivant. 1



2. On obtient le tableau suivant.

x_i	30	50	80	90	100
y'_i	0	1,8	3,7	4,2	4,6

3. On obtient la représentation graphique ci-contre 2
On remarque que les points $(x_i\,;y'_i)$ sont presqu'alignés.

4. Avec la calculatrice, on trouve $y' = 0{,}066x - 1{,}745$ et $r \approx 0{,}993$

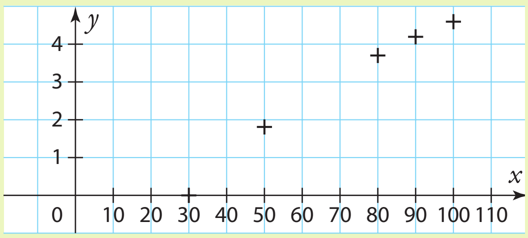
5. Comme $y' = \ln(y)$, on en déduit que $\ln(y) = 0{,}066x - 1{,}745$ et donc $y = e^{0{,}066x - 1{,}7425}$ 3

Conseils & Méthodes

1 La forme du nuage obtenu invite à chercher un ajustement exponentiel.

2 Les valeurs y'_i étant beaucoup plus petites que les valeurs y_i, on sera la plupart du temps obligé de changer l'échelle de l'axe des ordonnées et donc d'utiliser un autre repère orthogonal.

3 On pourra éventuellement utiliser les propriétés de la fonction exponentielle pour écrire : $y = e^{0{,}066x} \times e^{-1{,}745}$. Puis, avec $e^{1{,}745} \approx 0{,}175$, on a : $y = 0{,}175e^{0{,}066x}$



À vous de jouer !

5 On considère la série statistique à deux variables suivante.

Valeurs x_i	0	1	2	3
Valeurs y_i	12	19	31	58

1. On pose $y'_i = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 0 à 3. Calculer les valeurs y'_i.

2. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y'_i)$ dans un repère et vérifier que sa forme peut être ajustée par une droite.

3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près)

4. En déduire une expression de y en fonction de x.

6 On mesure l'évolution au cours de temps x, en heures, du taux de saturation y de monoxyde de carbone d'un patient intoxiqué qui reçoit un traitement à base d'oxygène.

Temps x_i (en heures)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Taux de saturation y_i (en %)	50	38	27	16	8	5	3

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal d'unités bien choisies.

2. On pose $z_i = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 1 à 6. Calculer les valeurs z_i.

3. Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).

4. En déduire une expression de y en fonction de x.

↪ Exercices 26 à 28 p. 237