Chapitre 2.
Le 2nd degré

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2022–2023

Plan du chapitre

- Paraboles
- Équations du 2nd degré

> *J'ai rédigé sur le sujet [...] un livre abrégé englobant les choses les plus subtiles et les plus nobles du calcul dont ont besoin les gens dans leurs héritages, dans leurs donations, dans leurs partages, dans leurs jugements, dans leurs commerces et dans toutes les transactions qu'il y a entre eux à propos de l'arpentage des terres, du creusement des canaux, de la géométrie et d'autres choses relatives à ses aspects et à ses arts [...]. J'ai découvert ainsi que les nombres dont on a besoin dans le calcul sont de trois types : ce sont les racines, les biens et le nombre seul. . .*
>
> *Al-Khwârizmî (IX^{e} siècle)*

I/ Paraboles

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des fonctions de type

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Une fonction de ce type est un polynôme du second degré (lorsque $a \neq 0$). Et l'écriture $ax^2 + bx + c$ est la forme développée de la fonction.

Le graphique d'une telle fonction est une parabole. Graphiquement, c'est une courbe qui ressemble à un "U", à l'endroit (on dit que la parabole est tournée vers le haut) ou à l'envers (elle est alors tournée vers le bas).

On appelle sommet de la parabole le point qui correspond à l'extremum de la fonction. Si la parabole est tournée vers le haut il s'agit d'un minimum, sinon d'un maximum.

I/ Paraboles

Il existe deux autres formes pour la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. la forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ (qui existe toujours)
2. la forme factorisée : $f(x) = a(x-r)(x-s)$ (qui n'existe pas toujours)

La forme canonique est liée au sommet de la parabole, qui a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$.

La forme factorisée est liée aux racines[1] de f, qui sont r et s (il est possible que $r = s$ si le sommet de la parabole est sur l'axe des abscisses). La forme factorisée n'existe donc que quand la fonction admet des racines.

1. Les racines d'une fonction f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

I/ Paraboles

Exemples : tracer, sur un même graphique, les paraboles correspondant aux fonctions suivantes (indication : demander à votre calculatrice de les tracer, puis reporter les courbes dans le cahier en prenant une petite dizaine de points pour chaque courbe) :

- $f(x) = x^2 + x + 1$
- $g(x) = x^2 + 3x$
- $h(x) = -2x^2 - 5x + 2$

Indiquer pour chacune de ces fonctions les coordonnées du sommet et l'ensemble des racines.

Allure de la parabole :

- La parabole ressemble à un “U” à l’endroit (la parabole est tournée vers le haut) quand $a > 0$.
- La parabole ressemble à un “U” à l’envers (elle est alors tournée vers le bas) quand $a < 0$.

Démonstration : en classe.

Transformations d'écriture :

- Quand on cherche la forme développée, il suffit... de développer.
- Quand on cherche la forme canonique :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Le sommet a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Pour son ordonnée, il suffit de calculer $\beta = f(\alpha)$.

- Quand on cherche la forme factorisée :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$$

Trouver les racines r et s est l'objet du II/.

La méthode d'Al-Khwârizmî ou méthode par « complétion du carré » :

Exemple : « Un bien et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams ».

Traduction : $x^2 + 10x = 39$.

> *Son procédé de résolution consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. Tu le multiples par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre. Tu prends alors sa racine carrée qui est huit et tu en retranches la moitié du nombre des racines et c'est cinq. Il reste trois et c'est la racine du bien que tu cherches et le bien est neuf.*
>
> *Al-Khwârizmî (IXe siècle)*