Héron d'Alexandrie (1er siècle) est célèbre pour une formule [1] de calcul d'aire d'un triangle (on reviendra sur les triangles cette année, mais la formule est hors programme). Si un triangle a des côtés de longueur a, b et c, et que l'on pose $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (c'est le demi-périmètre), alors l'aire du triangle est

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Une fois cette formule découverte, il ne s'est pas arrêté là : il faut bien calculer, maintenant, une racine carrée : comment faire, dans le cas général ? Comment fait notre calculatrice, d'ailleurs, pour calculer les racines carrées ?

Votre calculatrice exactement, je ne sais pas, mais Héron a trouvé un algorithme très efficace pour calculer les racines carrées, algorithme qui est encore aujourd'hui utilisé sur certaines machines.

Avant de présenter l'algorithme, nous allons l'expliquer géométriquement et faire quelques dessins.

1 Méthode géométrique

Dans cette partie, on va calculer une valeur approchée de $\sqrt{10}$. Si on sait construire un carré d'aire 10 cm^2, alors c'est très facile d'avoir une approximation de $\sqrt{10}$... c'est la mesure, en cm, du côté de ce carré !

On va donc essayer de construire des rectangles d'aire 10 cm^2, de façon à ce que ces rectangles « ressemblent de plus en plus » à des carrés. On part d'une rectangle quelconque d'aire 10 cm^2. Pour simplifier le travail, on part d'un rectangle de côtés 1 cm et 10 cm.

1. Construire le rectangle de côtés 1 cm et 10 cm.

Ensuite, à chaque étape, on part du rectangle de l'étape précédente, et on le rend « un peu plus carré ». Notons l et L (l minuscule et majuscule) les mesures de la largeur et de la longueur du rectangle précédent. La valeur $v = \dfrac{l+L}{2}$ est la moyenne entre ces deux nombres. Donc $v > l$ et $v < L$.

2. Calculer la valeur de v obtenue avec les mesures des côtés du premier rectangle.

On va construire maintenant un rectangle d'aire 10 cm^2 dont l'un des côtés mesure v.

3. Quelle doit être la mesure de l'autre côté du rectangle, pour que son aire mesure 10 cm^2 ?
4. Construire ce second rectangle.

Les points 2, 3, 4 permettent donc, à partir d'un rectangle donné, d'en construire un nouveau qui est « plus carré » que le précédent, sans changer son aire. Si on répète donc de multiples fois cette opération, on sera de plus en plus précis.

5. Reprendre les points 2, 3, 4 pour créer le troisième rectangle, le quatrième rectangle, puis le cinquième rectangle.
6. Quelle est la valeur de la largeur et de la longeur de ce cinquième rectangle ? On a donc ici obtenu un encadrement de $\sqrt{10}$. Lequel ? Quelle est donc la précision de cet encadrement ?

1. Pour ceux qui s'intéressent à l'informatique, il est intéressant de noter que, pour des triangles quasiment plats (donc, d'aire presque nulle), cette formule, à l'aide d'un ordinateur, donne lieu à trop d'erreurs d'arrondis.

2 Méthode purement calculatoire

Maintenant, on va simplifier la méthode pour ne plus faire que les calculs nécessaire. Voici donc l'algorithme à suivre, qui ne nécessite aucun dessin. Cet algorithme a comme entrées x (qui valait 10 dans notre partie précédente, c'est le nombre pour lequel on veut calculer une approximation de sa racine carrée), r (c'est une première approximation de $\sqrt{x}$) et n (le nombre d'étapes) :

Algorithme de Héron pour calculer $r = \sqrt{x}$.

Variables :
r et x sont deux nombres réels.
n est un nombre entier.

Corps de l'algorithme :
Lire la variable x
Lire la variable r
Lire la variable n
Répéter n fois
    r **prend la valeur** $\dfrac{r + \frac{x}{r}}{2}$
Fin_Répéter
Afficher la variable r

1. Pour les valeurs saisies $x = 10$, $r = 10$ et $n = 3$, quel est le nombre affiché ? Pour cela, suivre la variable r au cours du temps en écrivant ses valeurs successives (plus tard on apprendra à faire des tableaux de suivi de variables).
2. Pour les valeurs saisies $x = 10$ et $r = 10$, quelle valeur minimale doit-on saisir pour n pour que l'algorithme affiche une valeur approchée de $\sqrt{10}$ avec 8 décimales exactes ?