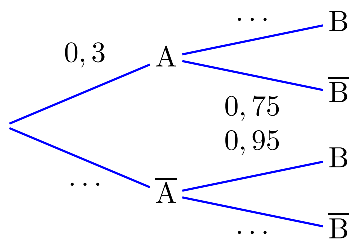
1 Probabilités de base

Exercice 1

1. Écrire $\dfrac{4}{5}$ sous forme décimale.
2. Écrire $\dfrac{42}{54}$ sous forme irréductible.
3. Calculer de tête $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{7}{8}$.
4. Calculer de tête $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}}$.

Exercice 2

Pour deux événements A et B, recopier et compléter l'arbre ci-contre puis calculer $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$, $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$, $P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$, $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})$, $P(\mathrm{B})$ et $P(\overline{\mathrm{B}})$.



Exercice 3

On considère un jeu dans lequel on lance d'abord un dé à 10 faces puis : si le résultat est 10, on lance un dé à 4 faces ; sinon on lance un dé à 6 faces.

On gagne lorsque le résultat du deuxième dé est 1. On considère les événements A : « Le résultat du premier dé est 10 » et B : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.
3. Déterminer la probabilité de gagner.

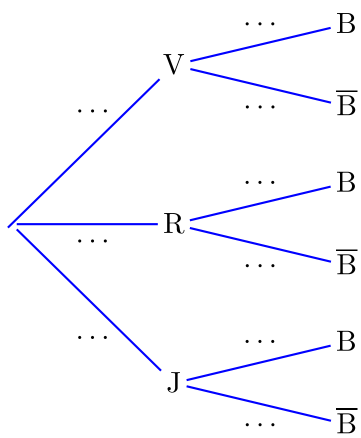
Exercice 4

La répartition des poivrons chez un maraîcher est :

- 40% de poivrons verts dont 60% sont bio.
- 45% de poivrons rouges dont 50% sont bio.
- 15% de poivrons jaunes dont 80% sont bio.

Nino achète un de ces poivrons au hasard et on note :

- V l'événement « Le poivron est vert ».
- R l'événement « Le poivron est rouge ».
- J l'événement « Le poivron est jaune ».
- B l'événement « Le poivron est bio ».



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'il achète un poivron jaune bio.
3. Calculer $P(\mathrm{B})$ puis $P(\overline{\mathrm{B}})$.

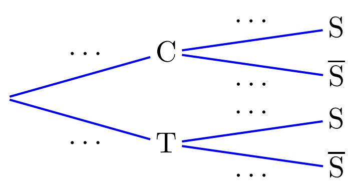
Exercice 5

Le matin, Dzovinar boit du café avec une probabilité $\dfrac{7}{12}$ ou du thé avec une probabilité $\dfrac{5}{12}$.

Lorsqu'elle boit du café, elle y met du sucre la moitié du temps alors que quand elle boit du thé, elle y met du sucre 90% du temps.

On appelle C l'événement : « elle boit du café ce matin », T l'événement : « elle boit du thé ce matin » et S l'événement : « elle met du sucre dans sa boisson ce matin ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation.
2. Quelle est la probabilité qu'elle boive un café sucré ce matin ?
3. Déterminer la probabilité qu'elle ne mette pas de sucre dans sa boisson ce matin.



Exercice 6

La gendarmerie a relevé, sur les 2 400 accidents corporels en voitures comptabilisés en 2011 dans le Val-de-Marne, que 24% des conducteurs étaient des femmes. Parmi elles, 25% conduisaient sous l'emprise de l'alcool. Par ailleurs, 574 conducteurs hommes conduisaient sous l'emprise de l'alcool.

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

Sexe / Alcool	Homme	Femme	Total
Sous emprise			
Pas sous emprise			
Total			

2. On tire au hasard un conducteur parmi les victimes d'accidents corporels dans le Val-de-Marne en 2011 et on note :

   - F : « Le conducteur était une femme. »
   - A : « Le conducteur était sous l'emprise de l'alcool. »

   Dans la suite de l'exercice, les probabilités seront données sous forme décimale arrondie à 0,01 près.

   (a) Déterminer la probabilité de l'événement F.

   (b) Déterminer la probabilité de l'événement A.

   (c) Décrire par une phrase l'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{F}$. Calculer $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{F})$.

   (d) Déterminer la probabilité de l'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{F}$.

   (e) Quel est le contraire de l'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{F}$? Calculer sa probabilité.

3. Un contrôle d'alcoolémie sur un conducteur accidenté révèle qu'il était sous l'emprise de l'alcool. Quelle est la probabilité que ce conducteur soit un homme ?

2 Probabilités conditionnelles, indépendance

Exercice 7

Le tableau ci-contre donne la répartition d'une population selon deux événements A et B.
Lorsque l'on tire un individu au hasard dans cette population, déterminer :

	A	$\overline{\mathrm{A}}$	Total
B	10	9	19
$\overline{\mathrm{B}}$	17	3	20
Total	27	12	39

1. $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$
2. $P_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$
3. $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
4. $P_{\overline{\mathrm{A}}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$

Exercice 8

Quand on lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, on considère les événements :

- A : « Le résultat est pair. »
- B : « Le résultat est 2. »
- C : « Le résultat est inférieur ou égal à 4. »

1. Décrire la probabilité $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})$ par une phrase.
2. Même question pour $P_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$.
3. Écrire la probabilité que le résultat soit pair sachant qu'il est inférieur ou égal à 4 avec la notation des probabilités conditionnelles.
4. Même question pour la probabilité que le résultat soit inférieur ou égal à 4 sachant qu'il est pair.

Exercice 9

On considère une expérience aléatoire dont l'univers associé est Ω et un événement A de Ω. Écrire plus simplement $P_{\Omega}(\mathrm{A})$.

Exercice 10

Quand on tire une personne au hasard dans la population, on considère les événements :

- L : « La personne est lycéenne. »
- F : « La personne est fonctionnaire. »
- R : « La personne aime la rhubarbe. »

1. (a) Décrire la probabilité $P_{\mathrm{L}}(\mathrm{R})$ par une phrase.
   (b) Même question pour $P_{\mathrm{R}}\left(\overline{\mathrm{F}}\right)$.
2. (a) Écrire la probabilité que la personne soit lycéenne sachant qu'elle n'est pas fonctionnaire avec la notation des probabilités conditionnelles.
   (b) Même question pour la probabilité que la personne n'aime pas la rhubarbe sachant qu'elle est fonctionnaire.

Exercice 11

Avec un logiciel, on génère un entier aléatoire entre 1 et 100. On considère les événements :

- A : « Cet entier est impair. »
- B : « Cet entier est inférieur ou égal à 50. »
- C : « Cet entier est 4, 76 ou 98. »

1. Décrire la probabilité $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$ par une phrase.
2. Écrire la probabilité que cet entier soit inférieur ou égal à 50 sachant qu'il est impair avec la notation des probabilités conditionnelles.
3. Écrire la probabilité que cet entier soit pair sachant qu'il est plus grand que 50 avec la notation des probabilités conditionnelles.
4. À l'aide de deux de ces événements, écrire une probabilité conditionnelle qui est égale à 0.

Exercice 12

Avant de partir au Vietnam, monsieur Castres a donné à l'école sa bibliothèque de livres de mathématiques dans laquelle figuraient 32 manuels de différents niveaux, certains étant conformes aux programmes actuels et d'autres, plus vieux, n'y étant pas conformes. La répartition de ces manuels est donnée par le tableau ci-contre :

Niveau \ Conforme	Oui	Non	Total
S5	9	8	17
S6	3	5	8
S7	1	6	7
Total	13	19	32

On prend un de ces manuels au hasard et on considère les événements :

- A : « Le manuel est un manuel de S5. »
- B : « Le manuel est un manuel de S7. »
- C : « Le manuel est conforme aux programmes actuels. »

1. Calculer $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$, $P(\mathrm{C})$.
2. Calculer $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$ et $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})$.
3. Calculer $P_{\mathrm{C}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$ et $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{C})$.

Exercice 13

Quand on lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, quelle est la probabilité que le résultat soit inférieur ou égal à 3 sachant qu'il est impair ?

Exercice 14

Dans une urne, il y a 3 boules rouges sur lesquelles figurent respectivement les lettres A, B et C et 7 boules bleues sur lesquelles figurent respectivement les lettres D, E, F, G, H, I et J. Quand on tire une boule dans cette urne, quelle est la probabilité :

1. que la lettre figurant sur la boule soit une voyelle sachant que la boule est bleue ?
2. que la lettre figurant sur la boule soit une lettre du mot MATHS sachant que la boule est rouge ?

Exercice 15

On considère les 23 joueurs de football ayant gagné la coupe du monde 2018 selon leur poste et selon s'ils jouaient en France ou à l'étranger durant cette saison 2017–2018 :

Poste \ Pays	France	Étranger	Total
Gardien	2	1	3
Défenseur	3	5	8
Milieu	1	5	6
Attaquant	3	3	6
Total	9	14	23

On tire au hasard un joueur parmi les 23 et on considère les événements :

- G : « Le joueur est gardien. »
- D : « Le joueur est défenseur. »
- M : « Le joueur est milieu. »
- A : « Le joueur est attaquant. »
- F : « Le joueur joue en France. »

1. Calculer $P(\mathrm{G})$ et $P(\mathrm{F})$.
2. Calculer $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$, $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$ et $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$.
3. Calculer $P_{\mathrm{G}}\left(\overline{\mathrm{F}}\right)$ et $P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{D})$.
4. Calculer $P_{\mathrm{G}}(\mathrm{M})$.
5. Trouver une probabilité conditionnelle égale à $\dfrac{5}{8}$.
6. Calculer $P_{\mathrm{G}\cup\mathrm{D}}(\mathrm{F})$ et $P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{M}\cup\mathrm{A})$.

Exercice 16

On considère deux événements A et B tels que $P(\mathrm{A}) = 0,2$ et $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0,8$. Calculer $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

Exercice 17

On considère deux événements C et D tels que $P(\mathrm{C}) = 0,1$ et $P(\mathrm{C}\cap\mathrm{D}) = 0,06$. Calculer $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})$.

Exercice 18

On considère deux événements U et V tels que $P(\mathrm{V}) = \dfrac{3}{4}$ et $P(\mathrm{U}\cap\mathrm{V}) = \dfrac{3}{8}$. Calculer $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{U})$.

Exercice 19

Dans une ville, 80% des logements sont des appartements, occupés à 45% par une seule personne et à 55% par plusieurs personnes. Le reste des logements sont des maisons.

Quand on prend un logement au hasard dans cette ville, on considère les événements suivants :

- A : « Le logement est un appartement. »
- S : « Le logement est occupé par une seule personne. »

1. (a) Déterminer $P(\mathrm{A})$ et $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{S})$ en utilisant l'énoncé.
   (b) En déduire la probabilité que le logement soit un appartement occupé par une seule personne.
2. Par ailleurs, 17% des logements de cette ville sont des maisons occupées par plusieurs personnes.
   (a) Traduire cette information en une probabilité en utilisant les événements $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{S}}$.
   (b) Déterminer $P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$ en utilisant l'énoncé.
   (c) En déduire la probabilité que le logement soit occupé par plusieurs personnes sachant que c'est une maison.

Exercice 20

Il manque des cartes dans un jeu de sorte que, quand on tire une carte, la probabilité d'obtenir une figure de carreau soit $\dfrac{1}{24}$ et celle d'obtenir un carreau soit $\dfrac{5}{24}$.

Quand on tire une carte dans ce jeu, on appelle F l'événement « obtenir une figure » et C l'événement « obtenir un carreau ».

1. Traduire les données de l'énoncé par des probabilités mettant en jeu les événements F et C.
2. En déduire la probabilité d'obtenir une figure sachant que la carte est un carreau.

Exercice 21

On considère deux événements A et B tels que $P(\mathrm{A}) = 0,3$, $P(\mathrm{B}) = 0,6$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = 0,9$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 22

On considère deux événements A et B tels que $P(\mathrm{A}) = \dfrac{5}{12}$, $P(\mathrm{B}) = \dfrac{3}{10}$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{8}$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 23

On considère deux événements indépendants C et D tels que $P(\mathrm{C}) = 0,12$ et $P(\mathrm{D}) = 0,65$. Déterminer $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})$, $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{C})$ et $P(\mathrm{C} \cap \mathrm{D})$.

Exercice 24

On considère deux événements indépendants E et F tels que $P(\mathrm{E}) = \dfrac{1}{3}$ et $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = \dfrac{1}{12}$. Calculer $P(\mathrm{F})$.

Exercice 25

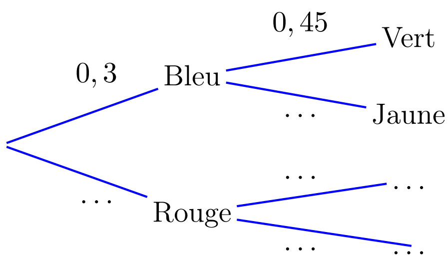
Dans une population il y a 80% de droitiers et 45% de myopes. Parmi les myopes, $\dfrac{1}{5}$ ne sont pas droitiers.

Quand on tire au sort quelqu'un dans cette population, les événements D : « obtenir une personne droitière » et M : « obtenir une personne myope » sont-ils indépendants ?

Exercice 26

On donne ci-dessous un arbre incomplet représentant une succession de deux épreuves indépendantes.

1. Recopier et compléter cet arbre.



2. Dresser un tableau représentant cette expérience aléatoire.

Exercice 27

Justin vérifie sa boîte à lettres tous les soirs et la probabilité qu'il y ait du courrier est 0,47. On admet que la présence de courrier ou non dans sa boîte à lettres un soir n'a pas d'influence sur celle du soir suivant.

1. Pourquoi peut-on penser que la répétition de cette épreuve deux soirs consécutifs est une succession de deux épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre.
3. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée.

Exercice 28

Dans un jeu de Scrabble®, il y a 45 voyelles sur 102 jetons. On tire successivement deux jetons de Scrabble®avec remise et on note si l'on a obtenu une voyelle ou non.

1. Cette expérience aléatoire est-elle une succession de deux épreuves indépendantes ? Justifier.
2. Représenter cette succession de deux épreuves par un arbre.
3. Représenter cette succession de deux épreuves par un tableau à double entrée.

Exercice 29

Ornella et Fanny sont allées boire un verre et, au moment de partir, elles décident de laisser un pourboire. Pour cela, Ornella prend une pièce au hasard dans sa poche qui contient deux pièces de 0,50 euro et une de 1 euro puis Fanny prend une pièce au hasard dans son porte-monnaie qui contient trois pièces de 0,20 euro, une de 1 euro et une de 2 euros.

1. Pourquoi peut-on penser que ces deux tirages sont une succession de deux épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre.
3. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée.

Exercice 30

On considère deux événements C et D tels que $P(\mathrm{D}) = 0,6$ et $P\left(\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{D}}\right) = 0,35$. Calculer $P_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{C})$.

Exercice 31

On considère deux événements disjoints E et F de probabilités non nulles. Calculer $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{F})$.

Exercice 32

On considère deux événements A et B tels que $P(\mathrm{A}) = 0,37$, $P(\mathrm{B}) = 0,68$ et $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,84$. Calculer $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

Exercice 33

On considère deux événements A et B tels que $P(\mathrm{A}) = 0,63$ et $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0,06$. Calculer $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$.

Exercice 34

On considère deux événements E et F tels que $P(\mathrm{E}) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{F}) = \dfrac{7}{12}$. Calculer $P\left(\overline{\mathrm{E}} \cap \mathrm{F}\right)$ et $P\left(\overline{\mathrm{E}} \cap \overline{\mathrm{F}}\right)$.

Exercice 35

Dans une bibliothèque, les statistiques montrent que (a) 45% des adhérents sont des filles et (b) 20% des adhérents sont des garçons ayant emprunté plus de 50 livres. Quand on rencontre un garçon sortant de la bibliothèque, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté plus de 50 livres ?

Exercice 36

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres pas :

- 30% des dragées contiennent une amande ;
- 40% des dragées avec amande sont bleues et les autres roses ;
- 25% des dragées sans amande sont roses et les autres bleues.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les événements :

- A : « La dragée choisie contient une amande. »
- B : « La dragée choisie est bleue. »

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,12$.
3. Calculer $P(\mathrm{B})$ puis en déduire $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.
4. Calculer $P_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{A})$.
5. Sophie préfère les dragées contenant une amande. Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou rose ?

Exercice 37

Annie a une collection d'éléphants miniatures dont la répartition est donnée ci-dessous.

Couleur Matière	Noir	Autre couleur	Total
Bois	17	84	101
Pierre	31	60	91
Métal	8	24	32
Total	56	168	224

Chaque semaine, elle tire au sort un éléphant pour le mettre sur son bureau au travail. On considère les événements :

- N : « L'éléphant est noir. »
- B : « L'éléphant est en bois. »
- M : « L'éléphant est en métal. »

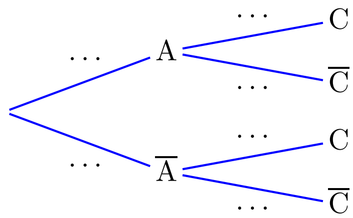
1. Calculer $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{N})$, $P_{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{B})$ et $P_{\mathrm{B} \cup \mathrm{M}}(\mathrm{N})$.
2. Les événements N et M sont-ils indépendants ?
3. Les événements N et B sont-ils indépendants ?

Exercice 38

Le cuisinier d'une colonie de vacances a confectionné des beignets pour le goûter :

- 30% des beignets sont à l'ananas, les autres sont aux pommes ;
- 35% des beignets à l'ananas sont aromatisés à la cannelle, ainsi que 45% des beignets aux pommes.

On choisit un beignet au hasard et on définit les événements A : « Le beignet choisi est à l'ananas » et C : « Le beignet choisi est aromatisé à la cannelle ».



1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 39

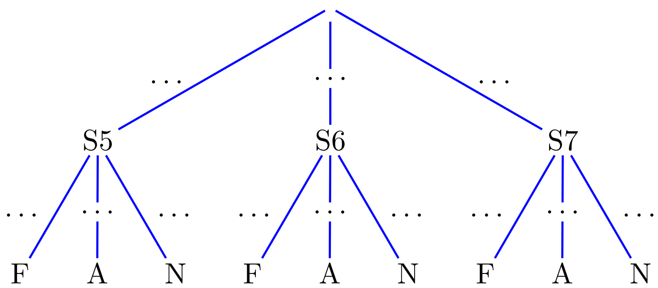
Dans l'association sportive des S5-S6-S7, il y a :

- 24% d'élèves de S5 dont 12% font du football, 45% de l'athlétisme et 43% de la natation ;
- 61% d'élèves de S6 dont 34% font du football, 44% de l'athlétisme et 22% de la natation ;
- 15% d'élèves de S7 dont 41% font du football, 9% de l'athlétisme et 50% de la natation.

On prend un élève de l'association sportive et on considère les événements :

- S5 (resp. S6, resp. S7) : « Cet élève est en S5 (resp. S6, resp. S7). »
- F (resp. A, resp. N) : « Cet élève pratique le football (resp. l'athlétisme, resp. la natation). »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. (a) Déterminer $P\left(\mathrm{N} \cap \mathrm{S5}\right)$.
   (b) Déterminer $P(\mathrm{N})$.
   (c) En déduire $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{S5})$.
3. On considère un élève qui se rend à la piscine pour faire de la natation. Est-il plus probable que ce soit un élève de S5, S6 ou S7 ?
4. (a) Déterminer $P\left(\mathrm{A} \cup \mathrm{N}\right)$.
   (b) Déterminer la probabilité que l'élève soit en S5 ou qu'il fasse du football.

Exercice 40

On considère le programme python ci-dessous.

```python
import random
a = random.randint(1,5)
if a == 1:
    b = random.randint(1,3)
    if b == 1:
        print("Rouge")
    else:
        print("Orange")
else:
    b = random.randint(1,12)
    if b > 8:
        print("Rouge")
    else:
        print("Orange")
```

Les événements « a=1 » et « Le programme affiche Rouge » sont-ils indépendants ?

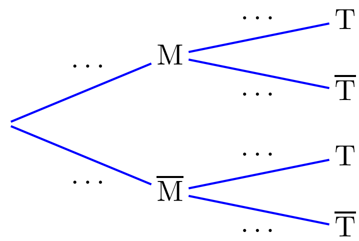
3 Inférence bayésienne

Exercice 41 — Test de dépistage d'une maladie (15 min) Objectif : Inverser une condition.

Une maladie est présente dans la population, avec la proportion d'une personne malade sur 10 000. Le responsable d'un laboratoire pharmaceutique souhaite faire approuver un nouveau test de dépistage qui vérifie que, si une personne est malade, alors le test est positif à 99%, et que, si une personne n'est pas malade, alors le test est positif à 0,1%.

Pour savoir si le laboratoire peut commercialiser son test, on souhaite connaître la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.

On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».



1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation.
2. Donner à l'aide des événements M et T les probabilités $P(\mathrm{M})$, $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$ et $P_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})$.
3. Calculer alors la probabilité $P(\mathrm{T})$ de l'événement T.
4. Exprimer la probabilité $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})$ qu'une personne soit malade si le test est positif, en fonction de $P(\mathrm{T})$, $P(\mathrm{M})$ et $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$. Cette formule s'appelle la formule de Bayes.

La formule de Bayes a longtemps été appelée formule de probabilité des causes. Elle permet en effet de remonter le temps, c'est-à-dire de calculer la probabilité d'une cause sachant celle de sa conséquence.

5. Calculer la valeur de cette probabilité.
6. Conclure pour savoir s'il faut commercialiser ce test ou non.

Exercice 42 — Mails indésirables (25 min) Objectif : Tester la pertinence de filtrages de mail.

On étudie la manière dont une boîte mail va considérer qu'un mail est indésirable ou ne l'est pas.

A. Premier exemple

On s'intéresse à la boîte mail d'une première internaute. On remarque que la moitié de son courrier est frauduleux et que 90% de ses mails frauduleux contiennent le mot *urgent*. Seul 10% du courrier non frauduleux contient ce mot. Le filtre en œuvre place tous les mails ayant le mot *urgent* dans la répertoire « Indésirables ». Quelle est la probabilité qu'un mail contenant le mot *urgent* ne soit pas frauduleux ?

B. Second exemple

On considère la boîte mail d'un second internaute, où les hypothèses sont les suivantes :

- un mail sur 200 provient d'une adresse inconnue ;
- un mail sur 800 est jugé indésirable ;
- un mail sur 5 contient le mot *urgent* et n'est pas indésirable.

Lorsque l'adresse est connue, on a les probabilités ci-contre concernant l'adresse d'envoi.

Collègues	Amis	Publicité
$0,4$	$0,1$	...

Lorsque l'adresse est connue, on a les probabilités ci-contre concernant le nombre de caractères du mail.

Inf. à 150	Entre 150 et 330	Sup. à 330
$0,01$	$0,44$	...

1. Recopier et compléter les tableaux avec les probabilités manquantes.
2. On considère un mail tiré au hasard dans cette boîte.
   (a) Déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un mail publicitaire provenant d'une adresse connue.
   (b) Lorsque l'adresse est connue, est-il plus probable de recevoir un mail indésirable entre 50 et 130 caractères ou un mail publicitaire ?
3. Sachant que le mail est indésirable, la probabilité qu'il contienne le mot *urgent* est $0,6$.
   (a) Déterminer la probabilité qu'un mail contienne le mot *urgent*.
   (b) Donner la probabilité qu'un mail soit considéré indésirable sachant qu'il contient le mot *urgent*.

Exercice 43 — De quelle urne vient la boule ? (15 min) Objectif : Inverser une condition.

On considère deux urnes : l'urne A contient 6 boules jaunes et 4 boules noires, l'urne B contient 3 boules jaunes et 5 boules noires.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne.

On notera : A l'événement « l'urne choisie est l'urne A », B l'événement « l'urne choisie est l'urne B », R l'événement « la boule tirée est jaune » et N l'événement « la boule tirée est noire ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la boule tirée soit jaune.
3. Sachant que la boule tirée est jaune, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne A.

Exercice 44 — Chez le médecin (25 min) Objectif : Découvrir la spécificité et la sensibilité.

Après un test pour détecter une éventuelle allergie, son médecin convoque Tom pour lui annoncer que le test est positif. Pas de chance car ce type d'allergie ne touche que 0,1% de la population. Tom demande donc à son médecin si ce test est fiable. Il lui répond que, si vous êtes allergique, alors le test est positif dans 90% des cas, et que, si vous ne l'êtes pas, alors le test est négatif dans 97% des cas.

Quelle est la probabilité que Tom soit vraiment allergique ? On note M l'événement « être allergique » et T l'événement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré de la situation.
2. Calculer la probabilité $P(\mathrm{T})$.
3. En déduire la probabilité cherchée.
4. Conclure.
5. Pour voir autrement ce paradoxe, considérons une population de 10 000 personnes. Recopier et remplir le tableau suivant en arrondissant les valeurs à l'unité.

Test / Allergique	T	$\overline{\mathrm{T}}$	Total
M	Vrai positif	Faux négatif	Allergique
$\overline{\mathrm{M}}$	Faux positif	Vrai négatif	Non allergique
Total	Test positif	Test négatif	10 000

6. Vérifier qu'on retrouve la probabilité cherchée.
7. La sensibilité d'un test est la probabilité que le test soit positif si la personne est allergique.
   (a) Déterminer une formule permettant de calculer la sensibilité à l'aide du tableau.
   (b) Que se passe-t-il si la sensibilité d'un test augmente ?
   (c) La calculer dans cet exemple.
8. La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas allergique.
   (a) Déterminer une formule permettant de calculer la spécificité à l'aide du tableau.
   (b) Que dire si la spécificité d'un test augmente ?
   (c) La calculer dans cet exemple.
9. La sensibilité et la spécificité d'un test sont-elles dépendantes ? Comment réagissent-elles entre elles ?
10. On appelle prévalence, notée p, la probabilité $P(\mathrm{M})$ et on note SE la sensibilité et SP la spécificité. La valeur prédictive positive (VPP) d'un test est la probabilité que la personne soit réellement allergique si son test est positif et la valeur prédictive négative (VPN) d'un test est la probabilité que la personne ne soit pas allergique si son test est négatif.
    (a) Donner les valeurs de VPP et VPN en fonction de p, SE et SP.
    (b) Les calculer dans cet exemple.

Exercice 45 — D'autres maladies (15 min) Objectif : Distinguer spécificité et sensibilité.

A. La mucoviscidose

On s'intéresse au patient porteur d'une mutation dans le gène CFTR qui est impliqué dans la mucoviscidose. En France, une personne sur 34 est porteuse de la mutation (cela n'implique pas d'être malade car il s'agit d'une maladie autosomique récessive).

Il existe un test pouvant détecter ces mutations avec une sensibilité de 85% et une spécificité très proche de 100%. On note :

- M l'événement « être porteur de cette mutation » ;
- T l'événement « le test est positif ».

1. Traduire les probabilités de l'énoncé à l'aide des événements T et M.
2. Après avoir fait un test qui s'est révélé négatif, déterminer la probabilité d'être quand même porteur.

B. L'appendicite

Pour diagnostiquer la présence d'une appendicite chez des patients présentant des douleurs abdominales aigues, on réalise une échographie de la région abdominale. Parmi les 255 patients chez lesquels l'échographie était positive, 235 présentaient effectivement une appendicite. Toutefois, 75 des 585 patients dont l'échographie était négative présentaient également une appendicite.

1. Représenter les données sous forme d'un tableau à double entrée.
2. Quelle est la spécificité du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ? Que signifie la valeur obtenue ?

Coup de pouce : La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas porteuse de la maladie testée.

3. Quelle est la sensibilité du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ? Que signifie la valeur obtenue ?

Coup de pouce : La sensibilité d'un test est la probabilité que le test soit positif si la personne est porteuse de la maladie testée.

4. Quelle est la valeur prédictive positive du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ? Que signifie la valeur obtenue ?
5. Quelle est la valeur prédictive négative du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ? Que signifie la valeur obtenue ?

4 Annales de tests B

Exercice 46 Calc. : ✓

Les employés d'un parc d'attraction Disney doivent enfiler un costume. Voici la répartition :

Costume \ Sexe	Homme	Femme
Mickey Mouse	10	5
Minnie Mouse	2	12
Pluto	8	3

Quelle est la probabilité qu'un employé soit :

2 points 1. déguisé en Minnie Mouse ;

2 points 2. un homme déguisé en Pluto ;

2 points 3. un homme, sachant qu'il est déguisé en Minnie Mouse.

Donnez vos réponses arrondies à deux décimales.

Exercice 47 Calc. : ✗

	Un dé non pipé a ses faces marquées 1, 1, 2, 2, 3, 4. Un joueur lance ce dé deux fois et ajoute les nombres obtenus pour calculer son score final. Utilisez un tableau à double entrée ou toute autre méthode pour les questions suivantes :
2 points	1. Calculez la probabilité que le score final soit 3.
3 points	2. Sachant que le premier nombre obtenu était pair, calculez la probabilité que le score final soit pair.

Exercice 48 Calc. : ✗

	2 compagnies opèrent chacune le même nombre de vols en montgolfière. On sait que 40% des vols avec la compagnie A sont retardés au décollage et 50% des vols avec la compagnie B sont retardés.
1 point	1. **Représenter** la situation par un arbre pondéré : Un passager, ayant volé en montgolfière, est tiré au sort.
1 point	2. **Prouver** que la probabilité que le passager ait choisi la compagnie A et que son vol ait été retardé est de $\frac{1}{5} = 0,2$
2 points	3. **Prouver** que la probabilité que le vol du passager ait été retardé est de $\frac{9}{20} = 0,45$.
2 points	4. Sachant que le vol a été retardé, **calculer** la probabilité que le passager ait choisi la compagnie A.

Exercice 49 Calc. : ✗

	Un groupe de 30 élèves est parti en camping.
5 points	1. Parmi eux, 20 ont eu des coups de soleil, et 12 sont revenus avec à la fois des coups de soleil et des des morsures d'insectes. Combien d'entre eux n'ont eu que des morsures d'insectes si l'on sait que 3 élèves n'ont eu ni l'un ni l'autre ? Dessinez un diagramme de Venn pour illustrer la situation.
6 points	2. Dans le groupe, 9 élèves avaient des allergies alimentaires. Parmi les 16 filles du groupe, 5 avaient des allergies alimentaires. On choisit un élève au hasard dans le groupe. Quelle est la probabilité qu'il n'a pas d'allergie alimentaire sachant que c'est un garçon ? Remplissez un tableau à double entrée pour illustrer la situation.

Exercice 50 Calc. : ✓

	Une enquête a montré que 75% des candidats ont travaillé très sérieusement pour présenter l'épreuve théorique du permis de conduire. Lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80% des cas. Par contre, lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70% des cas. On note T l'événement : « le candidat a travaillé très sérieusement » R l'événement : « le candidat a obtenu le code ». On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique.
2 points	1. (a) Calculer la probabilité de l'événement « le candidat a travaillé sérieusement et a obtenu le code ».
4 points	(b) Montrer que $P(\mathrm{R}) = 0,675$.
4 points	2. Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?

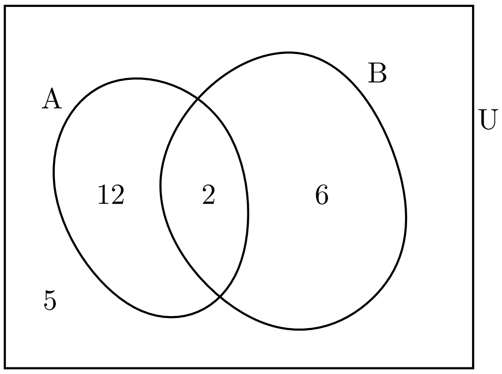
Exercice 51 Calc. : ✗

4 points	A et B sont deux évènements indépendants tels que $P(\mathrm{A}) = 0,2$ et $P(\mathrm{B}) = 0,3$. Calculer $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. Justifier.

Exercice 52 Calc. : ✓

On choisit au hasard un élève dans une classe. Dans le diagramme suivant, l'événement U est l'univers.
L'événement A est : « l'élève porte des lunettes ».
L'événement B est : « l'élève a des yeux bleus ».

2 points	1. Calculez $P(\mathrm{B})$.
2 points	2. Calculez $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.
2 points	3. Calculez $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.
2 points	4. Calculez $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$.
2 points	5. Un élève aux yeux bleus sort de la classe. Quelle est la probabilité qu'il porte des lunettes ?



Exercice 53 Calc. : ✗

3 points	Avec une pièce de monnaie équilibrée, quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois « PILE » en deux lancers ?

Exercice 54 Calc. : ✗

5 points

1. Compléter l'arbre
2. Calculer $P(\mathrm{B})$
3. Calculer $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$