Chapitre 1.
Probabilités

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

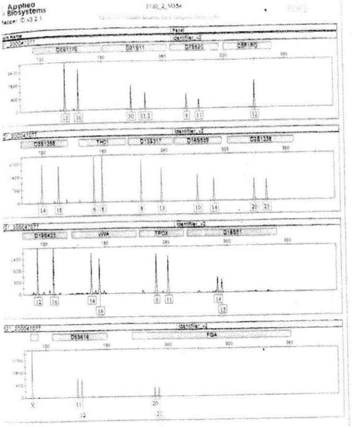
Année scolaire 2022–2023

Plan du chapitre

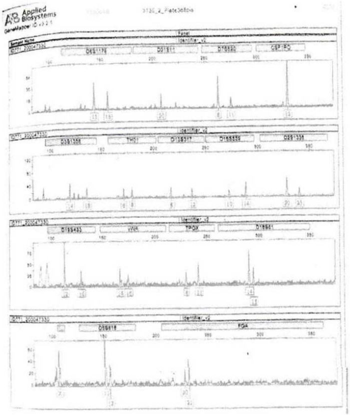
- Révisions de S5
- Formules
- Formule de Bayes

> *À la barre des témoins durant le procès de Sally Clark, Meadow désirait partager son savoir et son expérience, ainsi que les conclusions qu'il en avait tirées, avec le juge et le jury. « Des études statistiques ont montré que la probabilité que la mort subite d'un nourrisson survienne dans une famille comme celle des Clark est d'environ 1 sur 8 543 », expliqua-t-il de sa voix chaleureuse. « Ce qui signifie que la probabilité que deux morts subites surviennent dans la même famille est égale au carré de ce chiffre, soit environ 1 chance sur 73 millions. »*
>
> *Source : Schneps et Colmez, "Les maths au tribunal" (2015)*

Deux échantillons d'ADN :



ADN de Meredith.



ADN prélevé sur le couteau.

Source : Schneps et Colmez, "Les maths au tribunal" (2015)

> *Ceci explique aussi pourquoi l'équipe d'experts n'a pas effectué d'analyse supplémentaire de l'échantillon qu'ils ont prélevé sur le couteau : la quantité retrouvée était encore une fois LCN, trop petite pour qu'il soit possible d'effectuer deux tests séparés. [...] ce n'est pas en analysant deux échantillons différents, tous deux LCN, sans appliquer à aucun d'eux la procédure correcte, que l'on peut avoir compensé le fait que ni l'un ni l'autre des échantillons n'a été analysé en plusieurs parties : de la conjonction des deux résultats, tous deux peu fiables puisqu'obtenus par une procédure scientifique incorrecte, ne peut résulter un résultat fiable.*
>
> *Juge Hellmann, procès du meurtre de Meredith Kercher (2011)*

> *Malheureusement, l'échantillon de sperme était extrêmement dégradé et l'on ne pouvait lire qu'une partie du profil ADN ; [...] des treize paires de pics [...] qui constituent un profil génétique complet, seulement cinq étaient visibles, avec des indications partielles d'une ou deux autres. [...]*
> *On attribue à chacun des locus normalement examinés une RMP [Random Match Probability] [...] Autrement dit, si l'on ne considère qu'un seul locus, environ 1 personne sur 13 possédera chaque configuration possible de ce locus, c'est-à-dire environ 7,5% de la population.*
> *Source : Schneps et Colmez, "Les maths au tribunal" (2015)*

> “ *Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres. Elle consiste en ce que, si l'on observe des nombres très considérables d'événements d'une même nature, dépendant de causes constantes et de causes qui varient irrégulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans aucun sens déterminé, on trouvera, entre ces nombres, des rapports à très peu près constants. Pour chaque nature de choses, ces rapports auront une valeur spéciale dont ils s'écarteront de moins en moins, à mesure que la série des événements observés augmentera davantage, et qu'ils atteindraient rigoureusement s'il était possible de prolonger cette série à l'infini.*
>
> *S.D. Poisson, "Recherches sur la probabilité des jugements" (1838), Préambule (page 7)* ”

I/ Révisions : notations

Une expérience aléatoire est composée de différentes issues (on dit aussi événements élémentaires). On note souvent Ω l'ensemble des issues, et on l'appelle univers.

Par exemple si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé cubique où les faces sont numérotées de 1 à 6, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un événement est un sous-ensemble de Ω.

Dans l'exemple précédent, l'événement $A =$ "obtenir un nombre pair" est l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

Remarque : les événements sont toujours rapportés à une expérience donnée, ainsi obtenir un nombre pair ici n'a que 3 issues possibles, cela serait différent dans une autre expérience aléatoire (si on jouait à la roulette, par exemple, qui contient les nombres de 0 à 36).

I/ Révisions : partition

Deux événements qui n'ont aucune issue en commun sont deux événements qui sont dits incompatibles. Au contraire, deux événements qui ont au moins une issue en commun sont dits compatibles.

Les événements A et $\overline{A}$ sont donc deux événements incompatibles qui, pris ensemble, forment l'univers entier. Effectivement $A \cup \overline{A} = \{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$. Dans le cas général, si on a un ensemble d'événements qui sont incompatibles 2 à 2 et dont l'union fait Ω, on dit qu'on a un système exhaustif (on dit aussi que c'est une partition de l'univers, si aucun événement n'est vide).

Exemple : dans notre classe de 15 élèves de S6MAT3, je tire au hasard un élève. Les événements "tirer un élève de S6FRA", "tirer un élève de S6FRB", "tirer un élève de S6FRC" et "tirer un élève de S6FRD" forment un système exhaustif.

Quand on dessine un arbre de probabilités, on manipule des systèmes exhaustifs : les arcs qu'on fait partir désignent des événements incompatibles, et ils représentent toutes les issues.

Quand on joue à pile ou face, on dit souvent qu'on a “une chance sur deux” de gagner. Cela veut dire qu'il y a deux possibilités (pile, face) et que chacune des deux possibilités a autant de chance que l'autre de se produire (d'où, une chance sur deux de gagner).

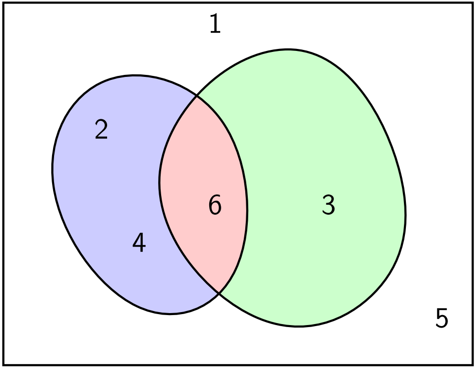
La probabilité d'un événement, c'est donc la “chance” qu'on a de voir cet événement se réaliser. Une chance de 100% ($= 1$), c'est quand on est certain que l'événement se produit. Et une chance de 0, c'est quand l'événement ne se produit jamais. Une probabilité est donc toujours entre 0 et 1.

Le cas de la pièce est un exemple de situation d'équiprobabilité, où toutes les issues ont la même probabilité. Dans ce cas, on calcule la probabilité d'un événement E par la formule :

$$P(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas au total}}$$

Pour les probabilités, on peut dessiner un diagramme de Venn : c'est un diagramme sur lequel on écrit toutes les issues, et sur lequel on pourra entourer différents événements pour les dénombrer facilement.

Je lance un dé équilibré à 6 faces :



On dessine un rectangle qui contient les issues.

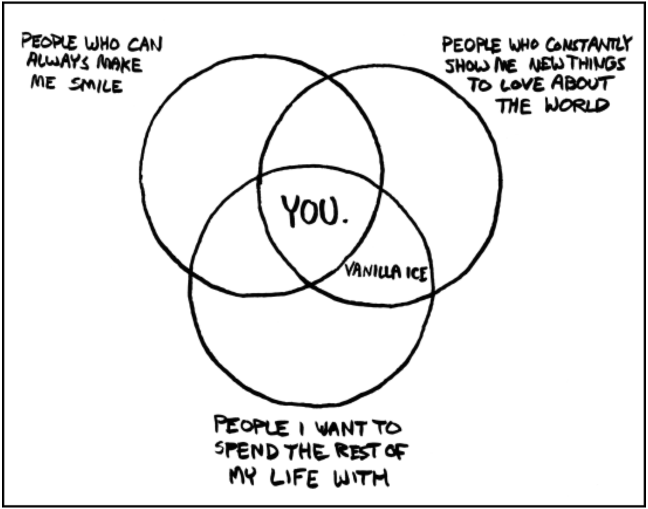
On dessine une première "patate" pour entourer l'événement A = "obtenir un nombre pair".

À droite l'événement B = "obtenir un multiple de 3".

Du coup, sur le dessin, le 6 est dans les deux "patates", car il est dans les deux événements.

Situation d'équiprobabilité donc $P(A) = \dfrac{3}{6}$ et $P(B) = \dfrac{2}{6}$.

Un autre exemple de diagramme de Venn :



Source : `https://xkcd.com/112/`

II/ Calculs de probabilités

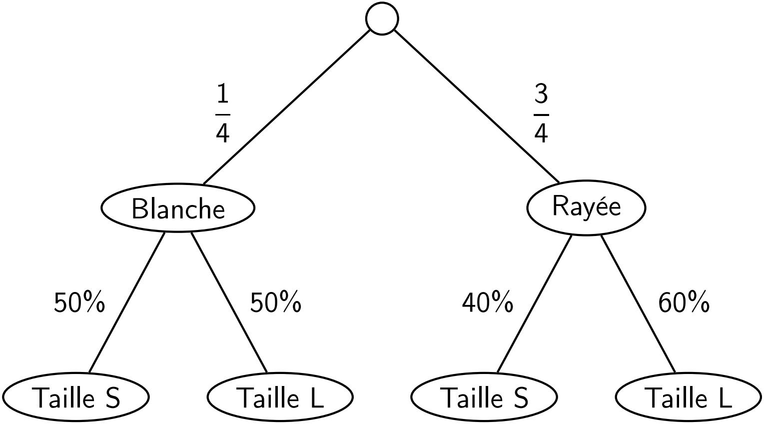
Parfois, une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes. On dessine un tableau à double entrée : en colonne une étape, en ligne l'autre. Par ex. si on lance un dé à 8 faces, un dé à 12 faces, et qu'on souhaite connaître les sommes possibles, on obtient le tableau :

Dé 8 \ Dé 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

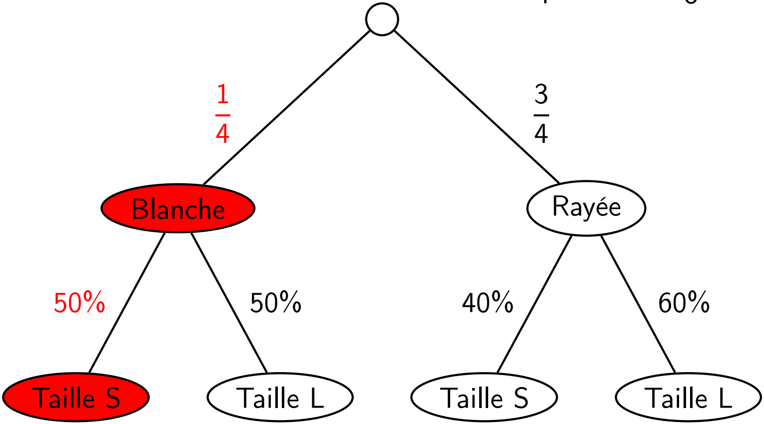
Un tel tableau est utile quand on est dans une situation d'équiprobabilité, à la fois pour les lignes et les colonnes. Ici c'est le cas. On peut calculer par exemple $P(17) = \dfrac{4}{96}$ (4 cases correspondent à une somme de 17, sur un total de $8 \times 12 = 96$ cases).

I/ Révisions : calculs de probabilités

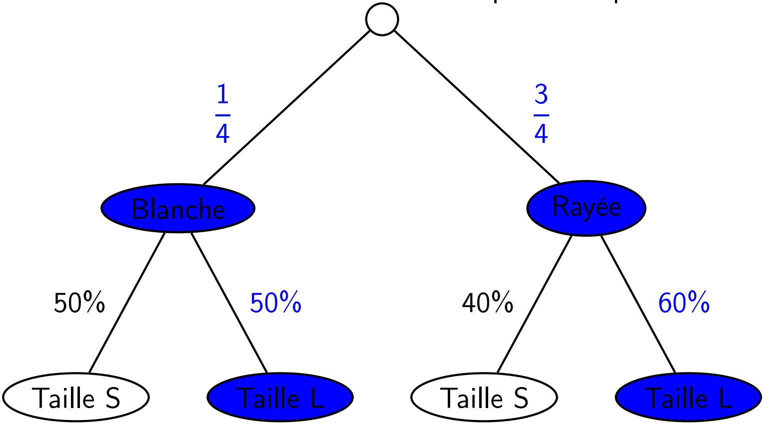
Parfois, une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes. Parfois on dessine un arbre, avec un étage pour chaque étape. Par ex. on considère un lot de chemises : $\frac{1}{4}$ de chemises blanches, le reste de rayées. Parmi les blanches, 50% de taille S et le reste de taille L. Parmi les rayées, 40% de taille S, le reste de taille L :



Pour calculer la probabilité d'un événement qui est sur une branche, on multiplie les probabilités sur la branche. Par ex. la probabilité de tirer une chemise blanche de taille S est de $\frac{1}{4} \times 50\% = \frac{1}{8}$.



Pour calculer la probabilité d'un événement qui est sur plusieurs branches, on ajoute les probabilités des branches. Par ex. la probabilité de tirer une chemise de taille L est de $\frac{1}{4}\times 50\%+\frac{3}{4}\times 60\% = 0,575$.



II/ Quelques propriétés : les axiomes

> “ *Es sei E eine Menge von Elementen* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, *welche man elementare Ereignisse nennt, und* $\mathfrak{F}$ *eine Menge von Teilmengen aus E ; die Elemente der Menge* $\mathfrak{F}$ *werden weiter zufällige Ereignisse genannt.*
>
> *I.* $\mathfrak{F}$ *ist ein Mengenkörper.*
> *II.* $\mathfrak{F}$ *enthält die Menge* E.
> *III. Jeder Menge A aus* $\mathfrak{F}$ *ist eine nichtegative reelle Zahl* $P(A)$ *zugeordnet. Diese Zahl* $P(A)$ *nennt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.*
> *IV.* $P(E) = 1$.
> *V. Wenn A und B disjunkt sind, so gilt*
>
> $$P(A + B) = P(A) + P(B).$$
>
> *A. Kolmogoroff, “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung” (1933), Chapitre I (Axiome)* ”

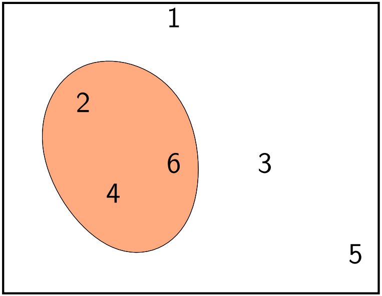
II/ Quelques propriétés : les axiomes

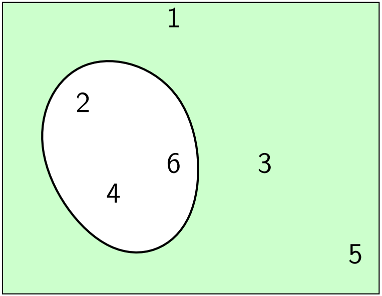
Notons Ω l'univers, et appelons événement un sous-ensemble de Ω (ce qu'on note $A \subset \Omega$). On définit alors une fonction P sur l'ensemble des événements. Pour que P soit une loi de probabilité, il faut que :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$ pour tout $A \subset \Omega$ (pour tout événement A)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tous $A \subset \Omega, B \subset \Omega$ tels que $A \cap B = \emptyset$ (pour tous événements A et B disjoints — on dit aussi incompatibles)

Il est parfois utile de regarder, pour un événement E, l'ensemble des issues qui ne sont pas dans E. Cela s'appelle l'événement contraire de E (on dit aussi événement complémentaire), noté $\overline{E}$.

Avec le dé cubique $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A =$ "obtenir un nombre pair" $= \{2, 4, 6\}$ (à gauche), on a $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ (à droite).





Probabilité de l'événement contraire

Pour un événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Probabilité de l'événement contraire

Pour un événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration : par définition de l'événement contraire, A et $\overline{A}$ sont incompatibles et leur réunion est Ω. Donc, grâce aux axiomes, il vient que :
$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ mais $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$, d'où il vient que $1 = P(A) + P(\overline{A})$, d'où le résultat.

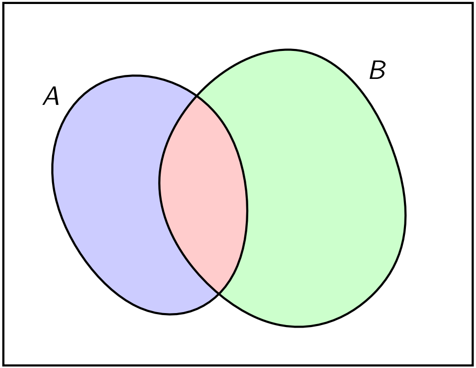
Remarque : cette formule est dans le formulaire [1] !

1. `https://www.eursc.eu/Syllabuses/2021-10-D-22-de-en-fr-1.pdf`

Probabilité de l'union

Pour tous événements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Explication sur un dessin :



$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

D'où il vient que $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$, d'où le résultat.

Remarque : cette formule est dans le formulaire[2] !

2. https://www.eursc.eu/Syllabuses/2021-10-D-22-de-en-fr-1.pdf

Probabilités conditionnelles

Pour tous A et B (avec $P(B) \neq 0$), $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Idée de la démonstration : savoir que B s'est déroulé change l'univers des possibles. Plutôt que de travailler dans l'univers Ω, on travaille dans l'univers B. Du coup, à l'intérieur de ce nouvel univers, l'événement A devient $A \cap B$ (la part de l'événement A qui est aussi dans B).

Remarque : cette formule est dans le formulaire[3] !

3. https://www.eursc.eu/Syllabuses/2021-10-D-22-de-en-fr-1.pdf

Deux événemets A et B sont indépendants si le fait d'obtenir de l'information sur la réalisation, ou pas, d'un des deux évenements, ne change pas la probabilité de réalisation de l'autre événement. En termes mathématiques :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants ssi } P_B(A) = P(A)$$

Or, si $P(B) \neq 0$, on a $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, donc :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants ssi } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Remarque : ces deux manières de reconnaître des événements indépendants sont dans le formulaire [4] !

4. `https://www.eursc.eu/Syllabuses/2021-10-D-22-de-en-fr-1.pdf`

Souvent, on connait $P_A(B)$ et on veut connaître $P_B(A)$:

Formule de Bayes

Pour tous A et B (avec $P(B) \neq 0$), $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$.

Démonstration : on sait $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)}$.

Mais du coup, on a écrit ici deux fois $P(A \cap B)$:

- d'une part (en multiplier par $P(A)$ la formule de gauche) : $P_A(B) \times P(A) = P(A \cap B)$
- d'autre part (en multipliant par $P(B)$ la formule de droite) : $P_B(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

On a donc $P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$, d'où découle la formule quand $P(B) \neq 0$.

Remarque : cette formule est dans le formulaire[5] !

5. https://www.eursc.eu/Syllabuses/2021-10-D-22-de-en-fr-1.pdf