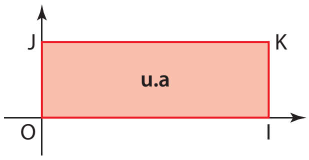
Cours

1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition **Unité d'aire**

Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$,
l'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle ayant pour côté [OI] et [OJ]

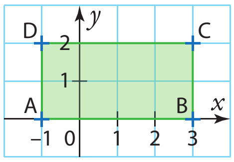
Exemple
Dans le repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre, l'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ. Si OI = 3 cm et OJ = 1 cm alors 1 u.a. = 3 cm^2.



Définition **Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle**

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
L'intégrale de *a* à *b* de la fonction *f* est l'aire de la surface (aussi appelée domaine sous la courbe de *f* sur $[a ; b]$) délimitée par :
• la courbe, • l'axe des abscisses, • les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire.
On la note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple
Soit *f* la fonction constante définie par $f(x) = 2$.
Alors $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \text{Aire(ABCD)} = 2 \times 4 = 8$ u.a.



Remarques

① $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un nombre réel positif.

② $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ car cette intégrale est l'aire d'un segment.

③ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ne dépend que des valeurs de *a*, *b* et *f*. La variable *x* est dite « muette » on peut la remplacer par une autre lettre : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u\ldots$

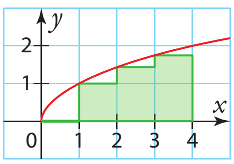
Propriété **Méthode des rectangles inférieurs et supérieurs**

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$. On partage l'intervalle $[a ; b]$ en *n* intervalles de même amplitude et on construit des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ». On note $\mathscr{A}_i$, resp. $\mathscr{A}_s$, l'aire des rectangles inférieurs (resp. supérieurs). Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathscr{A}_i = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathscr{A}_s = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

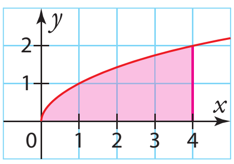
De plus, si la fonction est monotone : $\mathscr{A}_i \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{A}_s$.

Exemple Pour $n = 4$

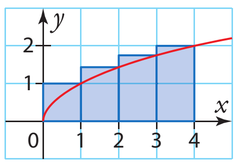
$\mathscr{A}_i$



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



$\mathscr{A}_s$



Exercices résolus

Méthode 1 Déterminer une intégrale par calcul d'aire

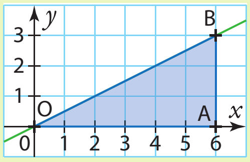
Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^6 0{,}5x\,dx$ **b)** $\int_{-2}^4 (3-0{,}5x)\,dx$

Solution

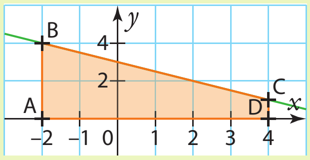
a) On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 0{,}5x$ 1 sur $[0 ; 6]$ et f est une fonction linéaire continue et positive sur $[0 ; 5]$. 2



$\int_0^6 0{,}5x\,dx$ est donc l'aire du triangle rectangle OAB. 3

D'où $\int_0^6 0{,}5x\,dx = \dfrac{OA \times OB}{2} = \dfrac{6 \times 3}{2} = 9.$

b) On trace la courbe représentative de g définie par $g(x) = 3 - 0{,}5x$ sur $[-2 ; 4]$ et on identifie le domaine sous la courbe. 1



g est continue et positive sur $[-2 ; 4]$ et $\int_{-2}^4 3 - 0{,}5x\,dx$ est l'aire du trapèze ABCD. 2

D'où $\int_{-2}^4 (3-0{,}5x)\,dx = \dfrac{AD \times (AB + DC)}{2} = \dfrac{6 \times (4+1)}{2} = 15.$ 3

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de fonction f dans un repère orthogonal et identifier le domaine sous la courbe.

2 Vérifier que la fonction est continue et positive sur l'intervalle défini par les bornes de l'intégrale.

3 Déterminer l'aire du domaine sous la courbe

À vous de jouer !

1 Calculer $\int_2^5 2x\,dx$.

2 Calculer $\int_{-4}^{-1} -2u - 1\,du$.

↪ Exercices 29 à 34 p. 152

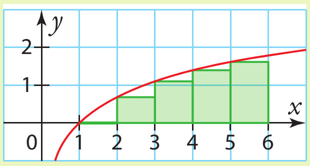
Méthode 2 Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

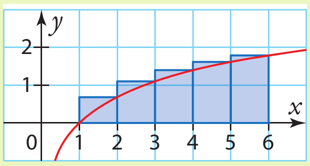
Énoncé

En divisant l'intervalle [1 ; 6] en 5 intervalles de même amplitude, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\,dx$.

Solution

1





$\mathscr{A}_i = 0 + \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5)$

$\mathscr{A}_i = \ln(120)$

$\mathscr{A}_s = \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5) + \ln(6)$

$\mathscr{A}_s = \ln(720)$

2 On en déduit $\ln(120) \leqslant \int_1^6 f(x)\,dx \leqslant \ln(720)$.

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de fonction f et tracer les rectangles inférieurs et supérieurs.

2 Calculer l'aire des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ».

À vous de jouer !

3 En divisant l'intervalle [1 ; 6] en 10 intervalles égaux, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\,dx$.

4 Soit $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2x+1)}{6}$.
Diviser [–2 ; 2] en 10 intervalles égaux, estimer $\int_{-2}^2 x^2\,dx$.

↪ Exercices 35 à 37 p. 152

2 Intégrale et primitive

a Fonction positive

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c06-04
ØLJEN
Les maths en finesse

Théorème Existence d'une primitive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}$ est dérivable sur $[a\,;b]$
et a pour dérivée f.

Remarque La fonction F est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Théorème Condition suffisante d'existence d'une primitive d'une fonction

Toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque Ce théorème ne donne pas directement une expression explicite de $F(x)$.

Exemple
La fonction ln est continue sur $[1\,;20]$, donc ln admet des primitives sur $[1\,;20]$.
La fonction F définie sur $[1\,;20]$ par $F(x)=\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

Propriété Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Toute Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$. On notera communément $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Démonstration
Pour tout élément $a\in[a\,;b]$, les fonctions $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x\mapsto F(x)-F(a)$ sont deux primitives de f qui s'annulent en a. Elles sont égales et le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

b Fonction continue

Définition Généralisation de la définition de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a\,;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel défini par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Remarque La méthode des rectangles s'applique à toute fonction continue.

Propriété Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;c]$. Soit $b\in[a\,;c]$. On a $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^c=F(c)-F(a)=F(c)-F(b)+F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b+[F(x)]_b^c=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque Si f est continue et positive et $a\leqslant b\leqslant c$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents.
$\mathcal{A}_{totale}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$ ou $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercices résolus

Méthode 3 Calculs d'intégrales avec les primitives des fonctions usuelles

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{x+1}{x^2+2x}\mathrm{d}x$

Solution

a) La fonction $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$ admet pour primitive la fonction

$F : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x$. **1** $\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}=\frac{269}{6}$. **2**

b) Soit h définie sur $[1 ; \mathrm{e}]$ par $h(x)=\frac{x+1}{x^2+2x}$. On reconnaît une expression ressemblant à $\frac{v'}{v}$ avec $v(x) = x^2 + 2x$ et $v'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$.Donc une primitive est

$H : H(x)=\frac{1}{2}\times\ln(x^2+2x)$ est une primitive de h. **3**

$\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{x+1}{x^2+2x}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\times\ln(x^2+2x)\right]_{1}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\times\ln(\mathrm{e}^2+2\mathrm{e})-\frac{1}{2}\times\ln(2)=1+\mathrm{e}-\frac{1}{2}\ln 2$ **4**

Conseils & Méthodes

1 Chercher une primitive de f notée F.

2 Calculer l'intégrale c'est calculer $F(4) - F(-1)$.

3 Un candidat primitive est $\ln(v)$. $(\ln(v(x)))'=\frac{2x+2}{x^2+2x}$ d'où une primitive de g.

4 Calculer $H(\mathrm{e}) - H(1)$.

À vous de jouer !

5 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{4}(x-1)^2\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{2}^{3}\frac{3x^2-1}{x^3-x}\mathrm{d}x$

6 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{2}\frac{1}{(2x-3)^2}\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{0}^{1}2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

↳ Exercices 38 à 41 p. 152

Méthode 4 Utiliser la relation de Chasles

Énoncé

Soit la fonction f, continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x<0\\ \mathrm{e}^x & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$. Déterminer $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Solution

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc intégrable. $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{5}f(x)\mathrm{d}x$ **1**

$\int_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}(-x+1)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{0}=7{,}5$ **2**

$\int_{0}^{5}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{5}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_0^5=\mathrm{e}^5-1$ **2**. On en déduit $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x=6{,}5+\mathrm{e}^5$.

Conseils & Méthodes

1 Décomposer l'intervalle d'intégration $[-3 ; 5]$ en intervalles sur lesquels la fonction ne change pas d'expression.

2 Calculer chaque intégrale séparément.

À vous de jouer !

7 Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t$ avec $f(x)$ définie par :

$x \mapsto x+1$ si $-1 \leqslant x \leqslant 0$ et par $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

8 Soit f définie sur $I = [-1 ; 1]$ par :

$f(x)=\begin{cases}0{,}25x+3 & \text{si } x<0\\ 2x+3 & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$

Calculer l'intégrale de f sur I.

↳ Exercices 42 à 44 p. 153

Cours

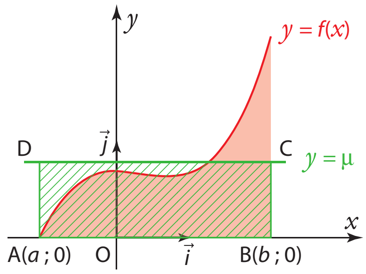
C Valeur moyenne d'une fonction

Définition Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel μ tel que : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Remarque Interprétation graphique dans le cas d'une fonction continue positive

Lorsque f est une fonction positive, on peut dire que l'aire sous la courbe de la fonction f entre a et b est donc égale à l'aire du rectangle ABCD de « largeur » $b-a$ et de « hauteur » μ.



Propriété Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et μ la valeur moyenne de f sur$[a\,;b]$.
Alors $a \leqslant \mu \leqslant b$.

3 Calculs d'aires à l'aide des intégrales

Propriété Aire sous la courbe d'une fonction continue et négative

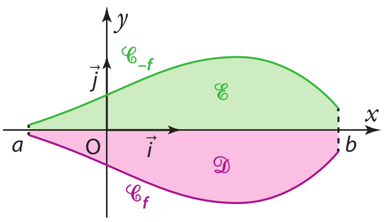
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $-\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (exprimée en unités d'aire).

Démonstration

Par symétrie, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine E, c'est-à-dire l'aire sous la courbe de la fonction g définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ par $g(x) = -f(x)$. g étant continue et positive, l'aire de $\mathscr{D}$ est donc égale à : $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (exprimée en u.a.).

La primitive de g, G, est égale à l'opposé de la primitive de F : $G = -F$.

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = -F(b) + F(a) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Propriétés Aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$.
L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à :

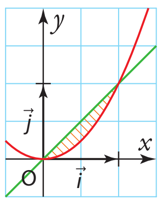
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

exprimée en unités d'aire.

Exemple

Soit f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Comme pour tout $x \in [0\,;1]$, on a $x < x^2$, l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est égale à :

$$\mathscr{A}(D) = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ u.a}$$



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c06-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

1. Déterminer la valeur moyenne m de la fonction f sur $[2 ; 5]$.

2. Donner une interprétation géométrique.

Conseils & Méthodes

1 Appliquer la formule de la moyenne.

2 Vérifier que la fonction f est positive pour interpréter la valeur moyenne.

Solution

1. f est continue, $m=\frac{1}{5-2}\int_2^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. **1** Or $\int_2^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln(x)]_2^5=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ donc $m=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$.

2. La fonction f est positive. **2** La valeur moyenne calculée est la longueur d'un rectangle de largeur 3 qui a la même aire que le domaine sous la courbe sur $[2 ; 5]$.

À vous de jouer !

9 Déterminer la valeur moyenne de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-10t}$ sur $[0 ; 2]$.

10 Calculer $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de f sur $[1 ; 4]$ est égale à 2.

↪ Exercices 45 à 49 p. 153

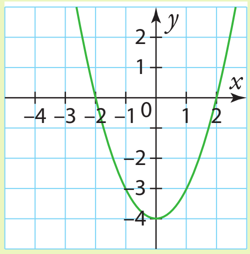
Méthode 6 Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

Énoncé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4$. Calculer :

a) l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisse entre les droites d'équations $x=-2$ et $x=2$.

b) l'aire $\mathscr{B}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisse entre les droites d'équations $x=-5$ et $x=1$.



Solution

a) f est négative entre -2 et 2. **1** $\mathscr{A}=-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\mathrm{d}x$ **2**

Une primitive de x^2-4 est $\frac{x^3}{3}-4x$ donc

$$\mathscr{A}=-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\mathrm{d}x=-\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}=-\left(-8+\frac{8}{3}\right)+\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}.$$

b) f est positive sur $[-5 ; -2]$ et négative sur $[-2 ; 1]$. **1**

$\mathscr{B}=\int_{-5}^{-2}(x^2-4)\mathrm{d}x-\int_{-2}^{1}(x^2-4)\mathrm{d}x$ **3** $\mathscr{B}=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-5}^{-2}-\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{1}$ 3 $=36.$

Conseils & Méthodes

1 Déterminer le signe de $f(x)$ entre -2 et 2.

2 Écrire l'égalité entre aire et intégrale. f étant négative, c'est l'opposé de l'intégrale de f qui est égale à l'aire

3 Décomposer l'intervalle $[-5 ; 1]$ en sous-intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant, puis calculer l'intégrale ou son opposé sur chacun des intervalles.

À vous de jouer !

11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x=-5$ et $x=-3$.

12 Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)^3+1$.

1. Montrer que la solution de $g(x)=0$ est $x=2$.
2. Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x=-3$ et $x=4$.

↪ Exercices 50 à 52 p. 153

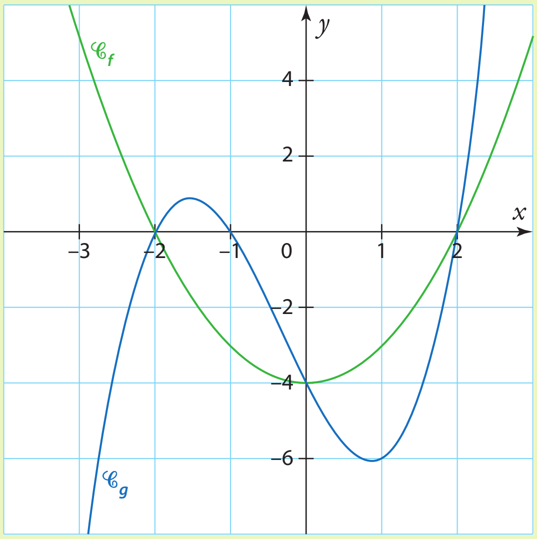
Exercices résolus

Méthode 7 Calculer une aire entre deux courbes

Cours 3 p. 146

Énoncé

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.



Solution

$f(x) - g(x) = x^2 - 4 - (x^2 - 4)(x + 1)$ **1**
$f(x) - g(x) = (x^2 - 4)(1 - x - x)$
$f(x) - g(x) = -x(x^2 - 4)$
On en déduit le tableau de signes suivant.

x	-2		0		2
$x^2 - 4$	0	–	-4	–	0
$-x$		+	0	–	
$f(x) - g(x)$	0	–	0	+	0

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0 ; 2]$ et en dessous sur $[-2 ; 0]$. **1**

$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0}(g(x) - f(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}(f(x) - g(x))\mathrm{d}x$ **2**

$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} x(x^2 - 4) + \int_{0}^{2} -x(x^2 - 4)\mathrm{d}x$ **3**

$\mathcal{A} = \left[\frac{(x^2 - 4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{(x^2 - 4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$

$\mathcal{A} = \frac{(-4)^2}{4} - \frac{0^2}{4} + \frac{0^2}{4} - \frac{(-4)^2}{4}$

$\mathcal{A} = 8$ u.a.

Conseils & Méthodes

1 Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ pour connaître la position relative des deux courbes.

2 Écrire une égalité entre intégrales et aire en décomposant l'intervalle initial suivant le signe de $f - g$.

3 Calculer les intégrales.

Thème 4

À vous de jouer !

13 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 1$
et $g(x) = x + 1$.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

14 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 0{,}25x^2 - x - 3$
$g(x) = -0{,}5x^2 - x + 9$.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

Exercices 69 à 73 p. 155