AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE A

QUESTIONS de Réserve 2

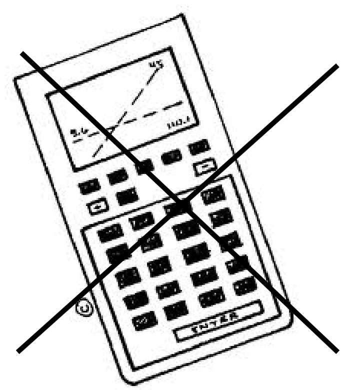
DATE : 8 septembre 2023, après-midi

DURÉE DE L'EXAMEN :

2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen sans support technologique
Crayon pour les graphiques
Formelsammlung / Formula booklet / Recueil de formules



REMARQUES PARTICULIÈRES :

- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées des explications nécessaires à leur élaboration.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Lorsque des graphes sont utilisés pour trouver une solution, la réponse doit inclure des esquisses de ceux-ci.

- Sauf indication contraire dans la question, la totalité des points ne pourra être attribuée à une réponse correcte en l'absence du raisonnement et des explications qui permettent d'arriver aux résultats ou solutions.

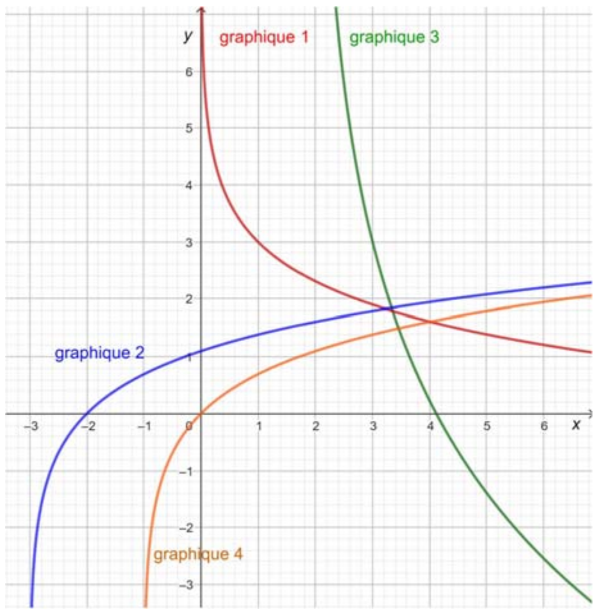
- Lorsqu'une réponse est incorrecte, une partie des points pourra cependant être attribuée lorsqu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte ont été utilisées.

PARTIE A	Page 1/10	Barème

1) On donne trois fonctions logarithmiques f, g et h définies respectivement par

$$f(x) = 3 - 4\ln(x-2)\ , \quad g(x) = 3 - \ln(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x+3)$$

ainsi que quatre graphiques de fonctions logarithmiques représentés ci-dessous.



Associer chacune des trois fonctions au graphique correspondant. **Justifier** la réponse. — 5 points

Plusieurs démarches sont possibles. On sait que 3 graphiques sur 4 représentent chacun une fonction.
On peut considérer les ensembles de définition :

Dom $f = \left]2\ ;\ +\infty\right[\Rightarrow$ graphique 3. Dom $g = \left]0\ ;\ +\infty\right[\Rightarrow$ graphique 1.

Dom $h = \left]-3\ ;\ +\infty\right[\Rightarrow$ graphique 2.

On peut aussi considérer des valeurs particulières bien choisies de la variable (afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté) : $f(3) = 3 \Rightarrow$ graphique 3.
$g(1) = 3 \Rightarrow$ graphique 1. $h(-2) = 0 \Rightarrow$ graphique 2.

La considération des variations des fonctions (f et g décroissantes car le coefficient de ln…est négatif, h croissante car le coefficient de ln…est positif) est intéressante car elle permet de restreindre les possibilités mais elle ne suffit pas pour conclure sur l'association de chacune des trois fonctions à son graphique.

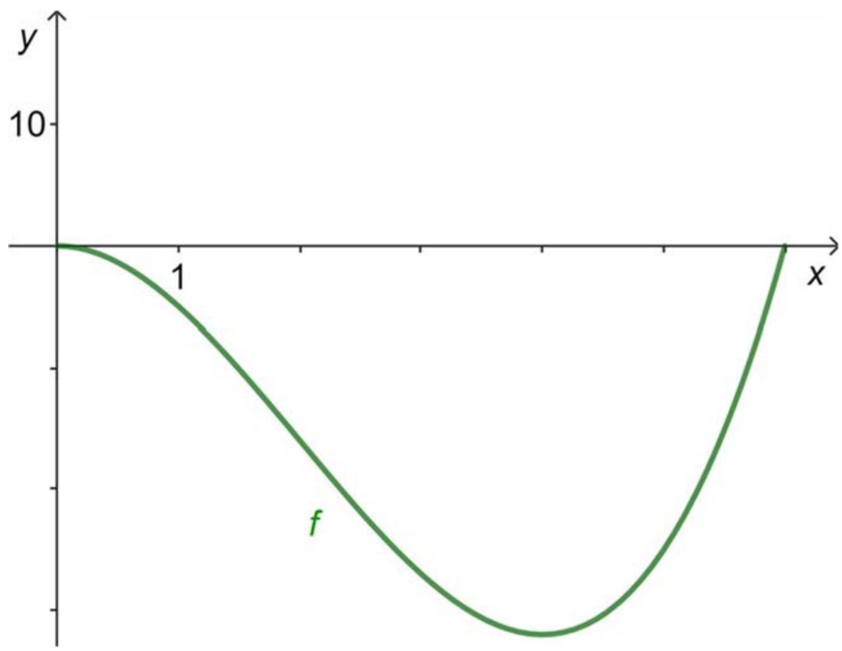
1 point pour chaque association fonction-graphique correcte.
2 points pour les justifications.

PARTIE A	Page 2/10	Barème

2) La forme du fond d'un lac peut être modélisée par la fonction *f* définie par

$$f(x) = x^3 - 6x^2 \ , \ \ 0 \le x \le 6$$

où *x* est mesurée en kilomètres et *f*(*x*) en mètres.



Déterminer la profondeur du lac en son point le plus profond. — 5 points

Déterminons le minimum de *f* dans l'intervalle $\left[0\ ;\ 6\right]$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

x	0		4		6
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
f			min		

Ou : $f''(x) = 6x - 12$.
$f''(0) = -12 < 0$ et $f''(4) = 12 > 0$.
f admet un minimum en $x = 4$.

$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 = -32$.

Conclusion : la profondeur du lac en son point le plus profond est de 32 m.

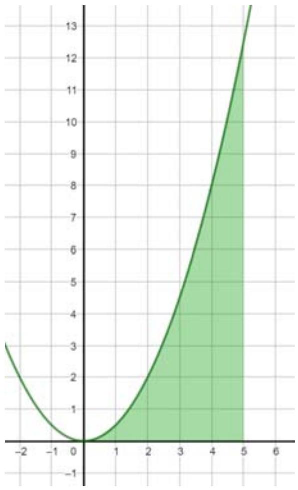
Calcul de la dérivée et détermination de ses zéros : 1 point.
Étude du signe de la dérivée 1re et variations de la fonction ou utilisation de la dérivée 2e : 2 points.
Calcul du minimum : 1 point.
Conclusion : 1 point.

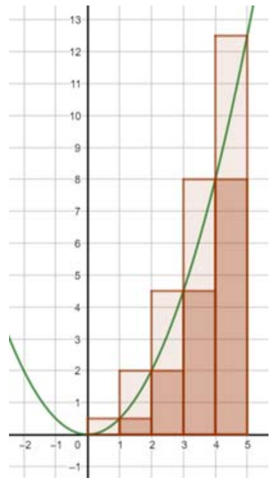
PARTIE A	**Page 3/10**	**Barème**
3) On sait que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + 2x$ est une primitive de la fonction f et que $\int_1^a f(x)dx = 5$, où a est un nombre réel positif. **Déterminer** *a*.		5 points
F est une primitive de $f \Rightarrow \int_1^a f(x)dx = F(a) - F(1) = a^2 + 2a - 3$. $\int_1^a f(x)dx = 5 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow (a-2)\cdot(a+4) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = -4$. a est un nombre réel positif. Donc $a = 2$.		
Traduction mathématique de «F est une primitive de f » : 1 point. Calcul de $\int_1^a f(x)dx$ en fonction de a : 1 point. Résolution de l'équation $\int_1^a f(x)dx = 5$: 2 points. Conclusion finale : 1 point.		

PARTIE A	Page 4/10	Barème

4) On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

On cherche à déterminer l'aire A de la surface délimitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=5$. (voir diagramme ci-dessous à gauche)





a) À l'aide des rectangles représentés (voir diagramme ci-dessus à droite), **déterminer** un encadrement de l'aire A recherchée. — 2 points

$$f(0)\cdot 1+f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+f(4)\cdot 1<A$$
$$<f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+f(4)\cdot 1+f(5)\cdot 1$$
$$\Leftrightarrow 15<A<\frac{55}{2}=27{,}5.$$

Encadrement de A par la somme des aires des petits rectangles et la somme des aires des grands rectangles : 1 point.
Calcul numérique : 1 point.

b) **Expliquer** comment obtenir un encadrement plus fin avec cette technique. — 1 point

Il faudrait diminuer la largeur des rectangles.

c) **Montrer** que la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{x^3}{6}$ est une primitive de la fonction f et calculer la valeur exacte de l'aire A. — 2 points

$F'(x)=\dfrac{x^2}{2}=f(x)$, donc F est une primitive de f.

$$A=\int_0^5 f(x)dx=F(5)-F(0)=\frac{125}{6}=20{,}8\overline{3}.$$

Montrer que F est une primitive de f : 1 point.
Calcul de A : 1 point.

PARTIE A	Page 5/10	Barème

5) La grande roue d'un parc d'attraction a un diamètre de 50 mètres.
Elle effectue un tour complet de manière uniforme toutes les 120 secondes. Son point le plus haut est situé à 55 mètres du sol.
On considère le mouvement d'une nacelle de la grande roue.
Celui-ci est un mouvement périodique qui peut être modélisé par une fonction *f* définie par

$$f(t) = a \cdot \sin(b(t-c)) + d$$

où *t* représente le temps, en secondes, et *f*(*t*) la hauteur de la nacelle, en mètres.
La nacelle se trouve au point le plus bas de la grande roue à l'instant $t = 0$.

a) **Montrer** que l'amplitude du mouvement est égale à 25 mètres. — 1 point

Le diamètre de la grande roue (50 m) est aussi la différence entre sa position la plus haute (55 m) et sa position la plus basse ($55 - 50 = 5$ m).

Donc l'amplitude du mouvement est $a = \frac{50}{2} = 25$ m.

b) **Montrer** que le déplacement vertical est égal à 30 mètres. — 1 point

Le déplacement vertical $d = 5 + \frac{50}{2} = 30$ m.

c) **Montrer** que $b = \frac{\pi}{60}$. — 1 point

La période *T* du mouvement est de 120 (s).

$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{120} = \frac{\pi}{60}$.

d) **Déterminer** *c* et **interpréter** le résultat. — 2 points

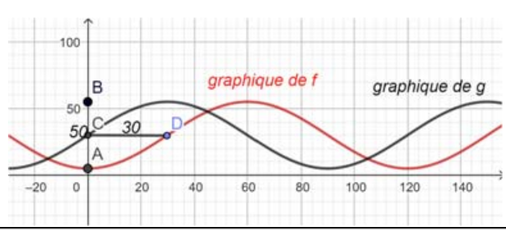
On a $f(t) = 25 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{60}(t-c)\right) + 30$.

On sait que $f(0) = 5 \Leftrightarrow 25 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{60}c\right) + 30 = 5 \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{60}c\right) = -1$

$\Leftrightarrow c = 30$.

c est le déphasage : le graphique de *f* est obtenu en translatant celui de la fonction *g* où $g(t) = a \cdot \sin(bt) + d$ de 30 unités vers la droite.

Illustration (non demandée) :



Détermination de *c* : 1 point. Interprétation : 1 point.

PARTIE A	Page 6/10	Barème
6) Lors d'une course de 100 m, l'athlète Ali est placé dans le couloir 3 sur la ligne de départ. Il y a 8 couloirs au total. Trois autres athlètes prenant part à la course sont placés dans les autres couloirs. **Calculer** la probabilité qu'aucun des trois autres coureurs ne soit placé à côté d'Ali.		5 points
Il y a 7 couloirs possibles mais les couloirs 2 et 4, situés à côté de celui d'Ali, sont interdits. Donc les trois autres coureurs doivent se trouver dans les 5 couloirs restants. La probabilité qu'aucun des trois autres coureurs ne soit placé à côté d'Ali est donc $\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \dfrac{2}{7}$.		
Nombre de cas possibles et nombre de cas favorables (combinaisons) : 3 points. Calcul des combinaisons et résultat final : 2 points.		
7) La lactase est une enzyme qui permet de digérer les produits laitiers contenant du lactose. 30% de la population mondiale produit sa propre lactase dans les intestins. Une société médicale a mis au point un nouveau test rapide pour voir si un individu produit ou non de la lactase. Une étude est réalisée pour déterminer la fiabilité du test rapide et l'étude montre que ce test donne un résultat positif correct pour 80 % des individus qui produisent de la lactase mais donne un faux positif pour 10 % des individus qui ne produisent pas de lactase. Le test rapide est utilisé sur une population importante.		

PARTIE A	Page 7/10	Barème
a) **Montrer** que 69% de la population devrait obtenir un résultat négatif.		3 points

Calculons la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population obtienne un résultat négatif.
Notons les événements de la manière suivante :
P = « L'individu obtient un résultat positif ».
N = « L'individu obtient un résultat négatif ».
L = « L'individu produit de la lactase ».
$\overline{L}$ = « L'individu ne produit pas de lactase ».
On donne : $P(L)=0{,}3$, $P(P|L)=0{,}8$ et $P(P|\overline{L})=0{,}1$.

$$P(N)=P(N\cap L)+P(N\cap \overline{L})=P(L)\cdot P(N|L)+P(\overline{L})\cdot P(N|\overline{L}).$$

$$P(\overline{L})=1-P(L)=0{,}7$$

$$P(N|L)=1-P(P|L)=0{,}2$$

$$P(N|\overline{L})=1-P(P|\overline{L})=0{,}9$$

Donc $P(N)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}69$.
On peut aussi utiliser un tableau à double entrée :

	P	N	Total
L	$0{,}8\cdot 30=24$	$30-24=6$	30
$\overline{L}$	$0{,}1\cdot 70=7$	$70-7=63$	$100-30=70$
Total	$24+7=31$	$100-31=69$	100(%)

69 % de la population obtient donc un résultat négatif.

Méthode : 2 points.
Calcul : 1 point.

b) **Calculer** la probabilité qu'un individu produise de la lactase, sachant qu'il a obtenu un résultat négatif.	2 points

$$P(L|N)=\frac{P(L\cap N)}{P(N)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}2}{0{,}69}=\frac{6}{69}=\frac{2}{23}$$

ou directement avec le tableau : $\frac{6}{69}=\frac{2}{23}$.

Utilisation de la formule de la probabilité conditionnelle : 1 point.
Calcul : 1 point.

PARTIE A	Page 8/10	Barème
8) Andy est un joueur de basket-ball. La probabilité qu'il réussisse un lancer franc est de 75 %. Il a droit à 3 tentatives et chaque lancer réussi vaut un point. a) Le nombre de points marqués suit-il une loi binomiale ? **Justifier** la réponse.		3 points
Le nombre de points marqués suit une loi binomiale. En effet, on a un ensemble de trois épreuves de Bernoulli (les 3 tentatives) indépendantes. Chaque épreuve a deux issues : succès (lancer réussi) ou échec (lancer raté). La probabilité de succès est la même à chaque épreuve $\left(\frac{3}{4}\right)$.		
1 point par argument.		
b) **Calculer** la probabilité qu'Andy marque au moins un point.		2 points
X désigne le nombre de points marqués. X suit une loi binomiale avec $n=3$ et $p=\frac{3}{4}$ (pas nécessaire, pas obligatoire). $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{63}{64}$. La probabilité qu'Andy marque au moins un point est égale à $\frac{63}{64}$.		
Application de la probabilité de l'événement contraire : 1 point. Calcul numérique : 1 point.		

PARTIE A	Page 9/10	Barème
9) Une entreprise produit des tablettes de chocolat dont la masse suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ g et d'écart-type $\sigma = 1$ g. On choisit au hasard une tablette de chocolat dans la production. a) **Déterminer** la probabilité que cette tablette pèse entre 97 g et 103 g.		3 points
Soit X la masse de la tablette en grammes. X suit une loi normale ($\mu = 100$, $\sigma = 1$). $P(97 \leq X \leq 103) = P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}997$.		
Réaliser que X doit appartenir à l'intervalle $\left[\mu - 3\sigma\ ;\ \mu + 3\sigma\right]$: 2 points. Résultat : 1 point.		
b) **Déterminer** la probabilité que cette tablette pèse plus de 100 g.		2 points
$P(X \geq 100) = P(X \geq \mu) = \dfrac{1}{2}$.		
Réaliser que X doit être supérieure à la moyenne : 1 point. Résultat : 1 point.		

PARTIE A	Page 10/10	Barème
10) Après quelques plaintes concernant les nouveaux horaires, la direction d'une école affirme que 10 % seulement des enseignants sont mécontents de leur nouvel horaire. Certains enseignants pensent qu'il s'agit de plus de 10%. Ils demandent alors leur avis à un groupe de 35 enseignants choisis au hasard. On effectue un test NHST à un seuil de signification de 5 %. a) **Déterminer** si ce test est unilatéral à gauche ou à droite. **Justifier** la réponse.		1 point
On veut savoir s'il y a plus de 10 % d'enseignants mécontents. Il s'agit donc d'un test unilatéral à droite.		
b) **Formuler** une hypothèse nulle appropriée H_0 et une hypothèse alternative H_1 pour le test.		1 point
$H_0 : p = 0{,}1$ et $H_1 : p > 0{,}1$.		
La variable aléatoire X désigne le nombre d'enseignants mécontents de leur nouvel horaire dans un échantillon de 35 enseignants. Le tableau ci-dessous montre les valeurs de $P(X \geq k)$ avec $k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$ et 10 en supposant que 10 % des enseignants sont mécontents.		

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X \geq k)$	0,975	0,878	0,694	0,469	0,269	0,132	0,055	0,020	0,006	0,002

c) **Déterminer** la valeur critique k et **interpréter** cette valeur.	3 points
D'après le tableau : $P(X \geq 7) = 0{,}055 > 0{,}05$ et $P(X \geq 8) = 0{,}020 < 0{,}05$. La valeur critique est donc $k = 8$. Interprétation : Si dans l'échantillon de 35 enseignants, il y en a 8 ou plus de 8 qui sont mécontents, on rejette H_0, c'est-à-dire que, dans ce cas, la direction de l'école a tort. S'il y a moins de 8 enseignants sur les 35 qui sont mécontents, on ne peut pas rejeter H_0, c'est-à-dire qu'on ne peut pas affirmer que la direction de l'école a tort.	
Détermination de la valeur critique : 1 point. Justification : 1 point. Interprétation : 1 point.	