AIDE À LA CORRECTION

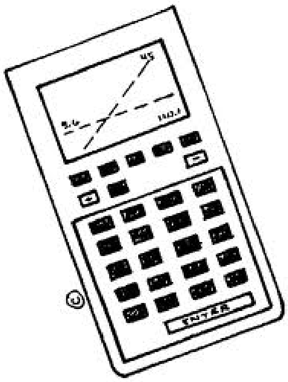
MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE B

QUESTIONS de Réserve 2

DATE: 8 septembre 2023, matin

DURÉE DE L'EXAMEN :

2 heures (120 minutes)



MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen avec support technologique :
Calculatrice approuvée

Crayon pour les graphiques

Formelsammlung/ Formula booklet/Recueil de formules

REMARQUES PARTICULIÈRES :

- Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées des explications nécessaires à leur élaboration.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Lorsque des graphes sont utilisés pour trouver une solution, la réponse doit inclure des esquisses de ceux-ci.
- Sauf indication contraire dans la question, la totalité des points ne pourra être attribuée à une réponse correcte en l'absence du raisonnement et des explications qui permettent d'arriver aux résultats ou solutions.
- Lorsqu'une réponse est incorrecte, une partie des points pourra cependant être attribuée lorsqu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte ont été utilisées

PARTIE B

QUESTION B1	Page 1/6	Barème

Partie 1

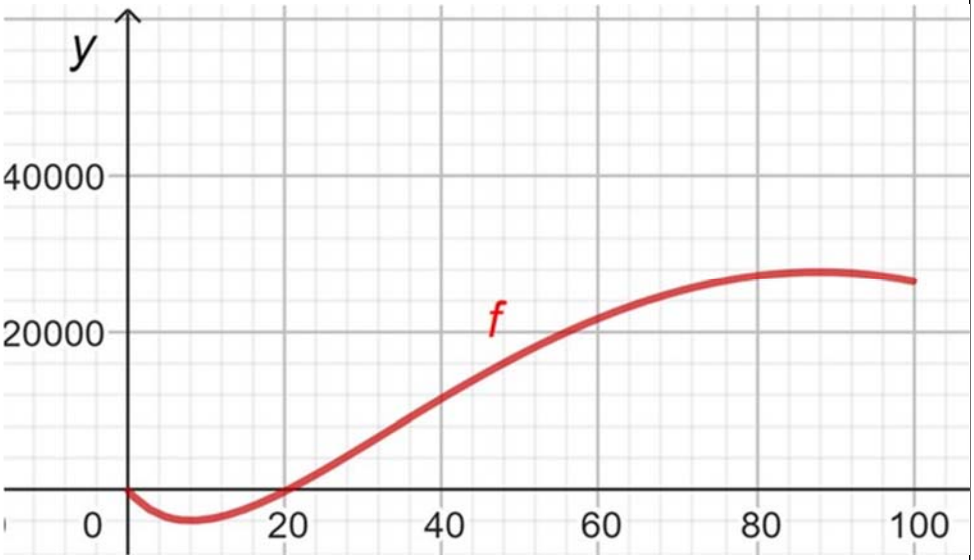
On utilise les pommes d'un verger pour produire du jus de pomme. Étant donnée la taille du verger, la quantité de jus produite par an ne peut excéder 100 tonnes.

Le résultat net (bénéfice ou déficit), en euros, réalisé par le fermier est modélisé par

$$f(x) = 2160x - 10x^2 - 40000\ln\left(\frac{x+12}{12}\right),$$

où x est le nombre de tonnes de jus de pomme.

Le diagramme ci-dessous montre le graphique de la fonction f.



a) **Calculer** le bénéfice réalisé par la vente de 50 tonnes de jus de pomme. — 1 point

Avec la calculatrice : $f(50) = 40000 \cdot \ln\left(\frac{6}{31}\right) + 83000 \approx 17310{,}9.$

La vente de 50 tonnes de jus de pomme procure un bénéfice d'environ 17 311 euros.

PARTIE B

QUESTION B1 | **Page 2/6** | **Barème**

b) **Déterminer** le nombre de tonnes de jus de pomme que le fermier doit produire pour obtenir un bénéfice (résultat net positif). Arrondir à un nombre entier de tonnes. — 3 points

Pour obtenir un bénéfice, il faut que $f(x) > 0$.

Sur le graphique, on voit que la réponse se situe aux environs de 20 tonnes.

Pour plus de précision, on résout, à l'aide de la calculatrice $f(x) = 0$ et on trouve la solution $x \approx 20{,}065$.

Contrôle : $f(20) \approx -33{,}1701 < 0$ et $f(21) \approx 485{,}964 > 0$.

Pour obtenir un bénéfice, le fermier doit produire au moins 21 tonnes de jus de pomme.

Indiquer l'inéquation à vérifier : 1 point.
Résoudre cette inéquation ou l'équation correspondante : 1 point.
Déterminer le nombre entier de tonnes nécessaire pour conclure : 1 point.

c) La dérivée de la fonction *f* est donnée par : $f'(x) = 2160 - 20x - \dfrac{40000}{x+12}$.

Utiliser la dérivée pour **déterminer** le nombre de tonnes de jus de pomme à produire pour obtenir le bénéfice maximum.
Calculer ce bénéfice maximum. — 4 points

À l'aide de la calculatrice : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8$ ou $x = 88$.

x	0		8		88		100
$f'(x)$	–	–	0	+	0	–	–
f					MAX		

Ou $f''(8) = 80 > 0$ et $f''(88) = -16 < 0$.

$f(88) = 27829{,}5$.

Il faut donc produire 88 tonnes de jus de pomme pour obtenir le bénéfice maximum et ce bénéfice maximum est de 27 829,50 euros.

Déterminer les zéros de la dérivée : 1 point.
Déterminer la valeur de *x* pour laquelle *f* admet un maximum en étudiant le signe de la dérivée 1re ou en utilisant la dérivée 2e : 2 points.
Calculer le maximum et conclure : 1 point.

PARTIE B

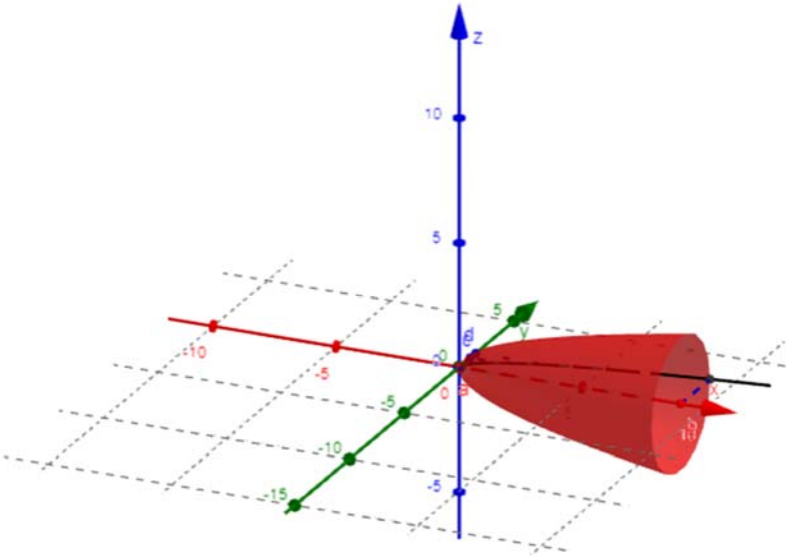
QUESTION B1	Page 3/6	Barème

Partie 2

Le fermier souhaite organiser une dégustation.

Pour cet événement, il prévoit d'utiliser des verres dont la forme est modélisée par la fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{0{,}8x}$ dont on fait tourner le graphique autour de l'axe des abscisses pour $0 \le x \le 9$.

Le résultat est illustré sur la figure ci-dessous.



d) Pour calculer le volume d'un tel solide de révolution, on utilise la formule :

$$V(x)=\pi\cdot\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx\,.$$

Si *x* est mesuré en cm, le volume *V*(*x*) sera donné en cm^3.

Calculer le volume d'un verre et donner la réponse en litres. Arrondir à deux décimales. — 2 points

$$V(x)=\pi\int_0^9\left(\sqrt{0{,}8x}\right)^2 dx=\frac{162\pi}{5}\approx 101{,}788\text{ cm}^3\approx 0{,}102\text{ dm}^3\approx 0{,}10\text{ L}.$$

Appliquer la formule et écrire le résultat en cm^3 : 1 point.
Écrire le résultat en L à 2 décimales : 1 point.

PARTIE B

QUESTION B1 **Page 4/6** **Barème**

e) On doit aussi dresser des tables pour la dégustation. La société qui fournit les verres les propose en 6 couleurs différentes. On dispose également de 3 tailles différentes de serviettes.

Déterminer de combien de façons on peut dresser une table en utilisant des verres de 2 couleurs différentes avec des serviettes de 2 tailles différentes.

2 points

2 couleurs différentes parmi 6 pour les verres, donc $\binom{6}{2}$ choix possibles.

2 tailles différentes parmi 3 pour les serviettes, donc $\binom{3}{2}$ choix possibles.

Conclusion : il y a $\binom{6}{2} \cdot \binom{3}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 3 = 45$ façons de dresser une table en utilisant des verres de 2 couleurs différentes avec des serviettes de 2 tailles différentes.

Utilisation correcte des combinaisons : 1 point.
Calcul numérique et résultat : 1 point.

f) Pour la publicité de l'événement, le fermier souhaite utiliser le slogan suivant :

"*Manger des pommes rend heureux*".

On a effectué un sondage dont les résultats sont regroupés dans le tableau suivant, où

X est le nombre de pommes consommées par semaine et
Y est l'évaluation du bonheur personnel sur une échelle allant de 1 à 10.

X	4	9	5	2	1	0	9	7	5
Y	5	4	9	6	4	5	8	4	2

Déterminer le coefficient de corrélation de Pearson et **justifier** si le slogan est correct ou non, sur la base des statistiques.

3 points

Avec la calculatrice : $r = 0{,}134903$.
Le coefficient de corrélation linéaire est très éloigné de 1. La corrélation est très faible, ce qui signifie que le sondage effectué ne confirme pas le slogan.

Déterminer le coefficient de corrélation de Pearson : 2 points.
Interpréter : 1 point.

PARTIE B

QUESTION B1	Page 5/6	Barème

Partie 3

Le fermier utilise différentes sortes de pommes de son verger pour produire de la salade de fruits :

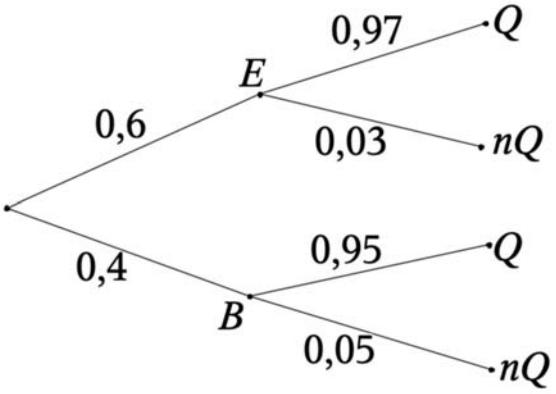
60 % de pommes *Elstar* et 40% de pommes *Boskoop*.

On admet que pour cette salade de fruits, 97 % des pommes *Elstar* et 95 % des pommes *Boskoop* sont de bonne qualité.

g) Le fermier prélève une pomme au hasard pour la contrôler.
Montrer que la probabilité que la pomme soit de mauvaise qualité est de 0,038.

3 points

Soient les événements :
E = « Elstar », *B* = « Boskoop »,
Q = « de bonne qualité », *nQ* = « de mauvaise qualité ».



$$P(nQ)=P(nQ\cap E)+P(nQ\cap B)=P(E)\cdot P(nQ|E)+P(B)\cdot P(nQ|B)$$

ou directement à partir de l'arbre : $=0{,}6\cdot 0{,}03+0{,}4\cdot 0{,}05=0{,}038.$

Méthode (arbre ou calcul de probabilités) : 2 points.
Calcul numérique et résultat : 1 point.

PARTIE B

QUESTION B1	Page 6/6	Barème
Le fermier conditionne ses pommes dans des boîtes de 60. On note *Y* la variable aléatoire qui désigne le nombre de pommes de mauvaise qualité par boîte. h) **Justifier** que *Y* suit une loi binomiale.		3 points
Les 60 pommes sont de qualités indépendantes. Chaque événement a deux issues : la pomme est de bonne ou de mauvaise qualité. La probabilité d'être de mauvaise qualité est la même pour chaque pomme : $p = 0{,}038$.		
1 point pour chaque argument.		
i) On choisit une boîte au hasard. **Calculer** la probabilité qu'il y ait exactement 2 pommes de mauvaise qualité dans la boîte. Arrondir à deux décimales.		2 points
Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0{,}038$. $P(Y = 2) = \binom{60}{2} \cdot 0{,}038^2 \cdot 0{,}962^{58}$ ou binomPdf(60,0.038,2) $\approx 0{,}2702906 \approx 0{,}27$. La probabilité qu'il y ait exactement 2 pommes de mauvaise qualité dans la boîte est d'environ 0,27.		
Paramètres de la binomiale : 0,5 point. Calculer la probabilité et conclure : 1,5 point.		
j) **Calculer** $E(Y)$ et **expliquer** la signification du résultat.		2 points
$E(Y) = 60 \cdot 0{,}038 = 2{,}28$. Cela signifie qu'il y a en moyenne 2 à 3 pommes de mauvaise qualité dans une boîte de 60 pommes.		
Calculer $E(Y)$: 1 point. Expliquer : 1 point.		

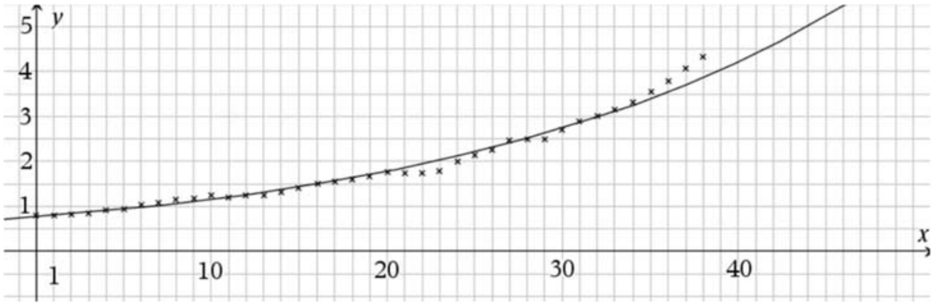
PARTIE B

QUESTION B2	Page 1/4	Barème

Partie 1

Le diagramme ci-dessous montre l'évolution du nombre de passagers du transport aérien mondial entre 1980 et 2018, ainsi que le graphique d'une fonction exponentielle f qui modélise cette évolution.

Au nombre x d'années après 1980 correspond le nombre $f(x)$ de passagers en milliards.



a) Le modèle exponentiel donné est-il pertinent ? **Justifier** la réponse. — 2 points

Le modèle exponentiel est proche des résultats recueillis (voir graphique). Il peut donc être considéré comme pertinent.

Réponse correcte : 1 point.
Justification : 1 point.

b) On considère les définitions du modèle f suivantes :

$$f_1(x) = 0{,}75 \cdot e^{0{,}043x} \;,\; f_2(x) = e^{0{,}043x},\; f_3(x) = 0{,}75 \cdot e^{-0{,}043x}.$$

Désigner la définition qui correspond le mieux au graphique représenté ci-dessus et **justifier** la réponse. — 3 points

$f_1(0) = 0{,}75$ et $f_1(30) = 2{,}725$, $f_2(0) = 1$ et $f_2(30) = 3{,}633$, $f_3(0) = 0{,}75$ et $f_3(30) = 4{,}803$.

C'est donc f_1 qui correspond le mieux au graphique représenté.

Réponse correcte : 1 point.
Justification : 2 points.

c) On considère le modèle $f(x) = e^{0{,}0431x - 0{,}284}$.

Calculer le nombre de passagers que ce modèle permet de prévoir en 2023.
Ce modèle a-t-il encore un sens en 2023 ? **Justifier** la réponse. — 3 points

En 2023, $x = 43$ et $f(43) \approx 4{,}80328 \approx 4{,}8$.
D'après le modèle, il y aura environ 4,8 milliards de passagers.
Ce modèle risque de ne plus avoir de sens en 2023 car plusieurs facteurs externes peuvent perturber l'évolution (guerre, pandémie, par exemple).

Calcul du nombre de passagers prévu par le modèle en 2023 : 2 points.
Sens du modèle en 2023 avec justification : 1 point.

PARTIE B

QUESTION B2 **Page 2/4** **Barème**

Partie 2

On estime que la probabilité qu'un passager du transport aérien ne se présente pas lors du décollage est de 0,05.

Une compagnie aérienne qui vend des places pour un avion de 100 places, décide d'en vendre 103 pour faire du « surbooking » et espère ainsi réaliser des bénéfices supplémentaires si certains passagers ne se présentent pas au départ.

d) **Calculer** la probabilité qu'au moins un passager qui se présente au départ ne trouve pas de place dans l'avion. Arrondir à 5 décimales. 3 points

Soit X le nombre de passagers qui se présentent au départ. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 103$ et $p = 0{,}95$.

On utilise la calculatrice pour trouver $P(X > 100) = P(101 \leq X \leq 103)$

$$= \sum_{k=101}^{103} \binom{103}{k} \cdot 0{,}95^{k} \cdot 0{,}05^{103-k} \text{ ou binomCdf(103,0.95,101,103)} \approx 0{,}106458.$$

La probabilité qu'au moins un passager qui se présente au départ ne trouve pas de place dans l'avion est d'environ 0,10646.

Reconnaître la loi binomiale et ses paramètres : 1 point.
Utiliser la calculatrice pour trouver $P(X > 100)$: 1 point.
Conclure : 1 point.

e) Les billets de cet avion sont vendus à 200 € l'unité.
Si un passager se présente et n'a pas de place dans l'avion, la compagnie lui doit 800 € de dédommagement.
On obtient alors le tableau suivant, où
X désigne le nombre de passagers qui se présentent au départ, et
Y l'impact du « surbooking », en euros, sur le résultat de la vente des billets, en fonction de X.

X	≤ 100	101	102	103
Y	$+600$	-200	-1000	-1800
Probabilité	0,8935	0,0739	0,0275	0,0051

Calculer $E(Y)$ et **interpréter** le résultat. Est-il avantageux pour cette compagnie de faire du « surbooking » ? 4 points

$$E(Y) = 600 \cdot 0{,}8935 - 200 \cdot 0{,}0739 - 1000 \cdot 0{,}0275 - 1800 \cdot 0{,}0051 \approx 484{,}64.$$

En moyenne, la vente des billets rapporte 484,64 euros de plus grâce au « surbooking ». Celui-ci est donc avantageux pour la compagnie.

Calculer $E(Y)$: 1 point. Interpréter : 2 points. Conclure : 1 point.

PARTIE B

QUESTION B2	Page 3/4	Barème

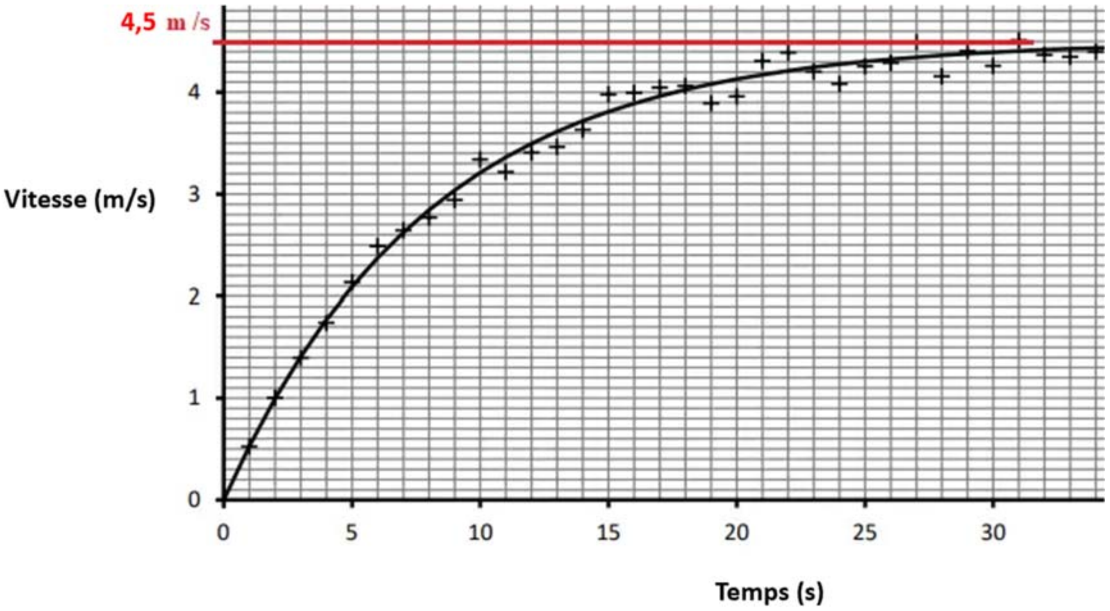
Partie 3

Afin de réduire les nuisances sonores et les émissions de CO2, le déplacement d'un avion au sol se fait sans utiliser ses moteurs principaux (réacteurs), mais des moteurs électriques.
L'avion, initialement à l'arrêt, démarre sur un sol horizontal ; la puissance des moteurs électriques ne lui permet pas de dépasser une vitesse maximale $v_{\max}$.

La vitesse de l'avion, exprimée en mètres par seconde (m/s), est modélisée par la fonction *v* définie par

$v(t) = 4{,}5 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0{,}13t})$, où $t \geq 0$ est le temps exprimé en secondes (s).

Le diagramme ci-dessous montre le graphique de cette fonction ; les croix représentent les valeurs expérimentales.



f) **Déterminer** la limite de la fonction *v* en plus l'infini et **interpréter** le résultat. 3 points

$\lim_{t \to +\infty} v(t) = 4{,}5 \cdot (1 - 0) = 4{,}5.$ 4,5 m/s est la vitesse maximale dont l'avion se rapproche de plus en plus, selon le modèle.

Déterminer la limite : 2 points
Interpréter le résultat : 1 point.

PARTIE B			
	QUESTION B2	**Page 4/4**	**Barème**
g)	**Déterminer** l'accélération initiale de l'avion.		3 points
	L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. L'accélération initiale est donc le nombre dérivé de v en 0. Avec la calculatrice : $v'(0) = 0{,}585\,\text{m/s}^2$.		
	Savoir que l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps : 1 point. En déduire qu'il faut déterminer $v'(0)$: 1 point. Résultat : 1 point.		
h)	**Calculer** $\int_{10}^{20} v(t)dt$ et **interpréter** le résultat.		4 points
	À l'aide de la calculatrice : $\int_{10}^{20} v(t)dt \approx 38{,}1372$. Interprétation : l'avion a parcouru une distance d'environ 38,14 m de la 10^e à la 20^e seconde après le départ.		
	Calculer l'intégrale : 2 points. Interpréter : 2 points.		