AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES

PARTIE B

DATE : 11 juin 2019, matin

DURÉE DE L'EXAMEN :

2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen avec support technologique :

Calculatrice TI-Nspire en mode « Press-to-test »

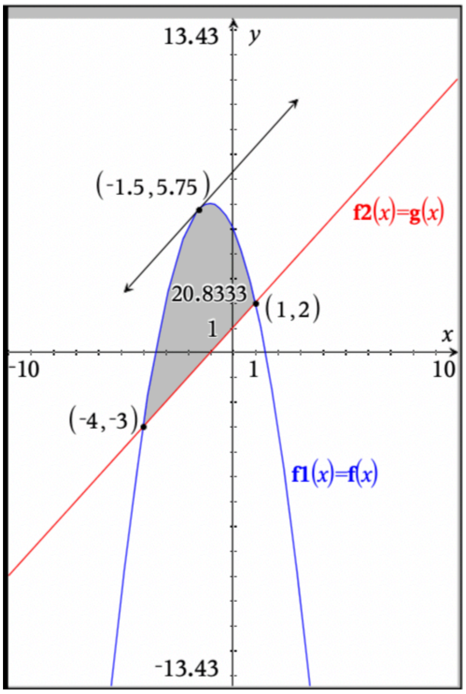
Crayon pour les graphiques

REMARQUES PARTICULIÈRES :

- Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées des explications nécessaires à leur élaboration.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Lorsque des graphes sont utilisés pour trouver une solution, la réponse doit inclure des esquisses de ceux-ci.
- Sauf indication contraire dans la question, la totalité des points ne pourra être attribuée à une réponse correcte en l'absence du raisonnement et des explications qui permettent d'arriver aux résultats ou solutions.
- Lorsqu'une réponse est incorrecte, une partie des points pourra cependant être attribuée lorsqu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte ont été utilisées.
- Certaines questions ne peuvent être résolues qu'à l'aide de la calculatrice. La formulation de ces questions l'indique alors clairement. Toutes les autres questions peuvent être résolues avec ou sans calculat

PARTIE B		
QUESTION B1 ANALYSE	**Page 1/2**	**Barème**
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ et $g(x) = x + 1$.		
a) **Esquisser les graphiques de f et de g dans le même repère. Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.**		**4 points**

Graphiques de f et g :



Coordonnées des points d'intersection des graphiques de f et de g :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 5 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow$
$x - 1 = 0$ ou $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -4$.

Si $x = 1$, $y = f(1) = g(1) = 2$ et si $x = -4$, $y = f(-4) = g(-4) = -3$.

Avec la calculatrice :

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=\mathbf{g}(x),x) \blacktriangleright x=-4 \text{ or } x=1$

$\mathbf{f}(-4) \blacktriangleright -3$ ou $\mathbf{g}(-4) \blacktriangleright -3$ et $\mathbf{f}(1) \blacktriangleright 2$ ou $\mathbf{g}(1) \blacktriangleright 2$

On peut aussi déterminer les coordonnées des points d'intersection sur le graphique (analyse graphique – intersection).

Coordonnées des points d'intersection des graphiques de f et g : $(1 ; 2)$ **et** $(-4 ; -3)$.

Graphiques : 2 points.
Coordonnées des points d'intersection : 2 points.

PARTIE B

QUESTION B1 ANALYSE	**Page 2/2**	**Barème**
b) **L'aire** A **de la surface délimitée par les graphiques de deux fonctions** f **et** g **entre les abscisses** a **et** b **est donnée par :** $$A=\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert\,dx.$$ **Calculer l'aire de la surface délimitée par les graphiques de** f **et** g **entre les abscisses** -4 **et** 1**.**		**2 points**
Entre les abscisses -4 et 1, le graphique de f est au-dessus de celui de g. Donc l'aire est égale à $\int_{-4}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+5x-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-4}^{1}=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-4}^{1}=$ $\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4\right)-\left(\frac{64}{3}-24-16\right)=-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}+44=-\frac{139}{6}+\frac{264}{6}=\frac{125}{6}$ $\approx 20{,}8333...$ **Avec la calculatrice** : $\int_{-4}^{1}\lvert \mathbf{f}(x)-\mathbf{g}(x)\rvert\,dx \blacktriangleright \frac{125}{6} \approx 20.8333$. On peut aussi déterminer l'aire sur le graphique (analyse graphique – zone). **Aire de la surface délimitée par les graphiques de** f **et** g **entre les abscisses** -4 **et** 1 **:** $\frac{125}{6}\approx 20{,}8333...$		
Intégrale à calculer : 1 point (si l'aire n'est pas déterminée sur le graphique donné par la calculatrice). Calcul de l'aire et résultat : 1 point.		
c) **Déterminer l'abscisse du point du graphique de** f **où la tangente est parallèle au graphique de** g**.**		**4 points**
La tangente au graphique de f en un point d'abscisse x est parallèle au graphique de $g \Leftrightarrow f'(x)=1 \Leftrightarrow -2x-2=1 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$. **Avec la calculatrice** : $\mathbf{fp}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright$ *Terminé* $\quad$ $\text{solve}(\mathbf{fp}(x)=1,x) \blacktriangleright x=\frac{-3}{2}$ La tangente est tracée sur le graphique (non demandé aux élèves). **L'abscisse du point du graphique de** f **où la tangente est parallèle au graphique de** g **est** $x=-\frac{3}{2}$.		
Équation à résoudre : $f'(x)=1$: 2 points. Détermination de l'abscisse du point : 2 points.		

PARTIE B

QUESTION B2 ANALYSE	Page 1/4	Barème

Utiliser la calculatrice en a), b), d) et e).

On a mené une expérience sur le temps d'infusion des feuilles de thé vert.
On verse de l'eau chaude sur les feuilles de thé.
La théine contenue dans ces feuilles se dissout alors dans l'eau chaude.

La teneur en théine contenue dans le thé chaud, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f définie par

$$f(x) = 48 \cdot (1 - e^{-0,6x}),$$

où x est le temps, en minutes, après avoir versé l'eau chaude sur les feuilles de thé et $f(x)$ est la teneur en théine contenue dans le thé chaud exprimée en mg par gramme de thé.

a)	**Calculer la teneur en théine après 1 minute et après 6 minutes.**	**2 points**

Avec la calculatrice :

$\mathbf{f}(x) := 48 \cdot \left(1 - \mathbf{e}^{-0.6 \cdot x}\right)$ ▸ *Terminé* $\quad \mathbf{f}(1)$ ▸ 21.657 $\quad \mathbf{f}(6)$ ▸ 46.6885

$f(1) = 48 \cdot \left(1 - e^{-0,6 \cdot 1}\right) = 21,657$.

Après 1 minute, la teneur en théine est d'environ 21,7 mg/g.

$f(6) = 48 \cdot \left(1 - e^{-0,6 \cdot 6}\right) = 46,6885$.

Après 6 minutes, la teneur en théine est d'environ 46,7 mg/g.

Après 1 minute : 1 point.
Après 6 minutes : 1 point.

b)	**Tracer le graphique de f pour les 10 premières minutes.**	**3 points**

Voir page suivante.

c)	**Interpréter le facteur 48 dans l'expression de $f(x)$.**	**3 points**

48 est, en mg/g, la limite supérieure de la teneur en théine.

En effet $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(48 \cdot \left(1 - e^{-0,6x}\right)\right) = 48(1-0) = 48$.

Avec la calculatrice :

$\lim\limits_{x \to \infty} (\mathbf{f}(x))$ ▸ 48.

Cette limite supérieure s'observe sur le graphique (pas demandé aux élèves) : voir page suivante.

Interprétation : 2 points.
Justification par le calcul de la limite : 1 point.

PARTIE B

QUESTION B2 ANALYSE	Page 2/4	Barème

d) **Le thé est prêt à être consommé lorsque la teneur en théine atteint** 33,6 mg/g**.**
Déterminer à quel moment le thé est prêt à être consommé. — **3 points**

On résout l'équation $f(x)=33{,}6 \Leftrightarrow 48\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}6\,x}\right)=33{,}6 \Leftrightarrow$

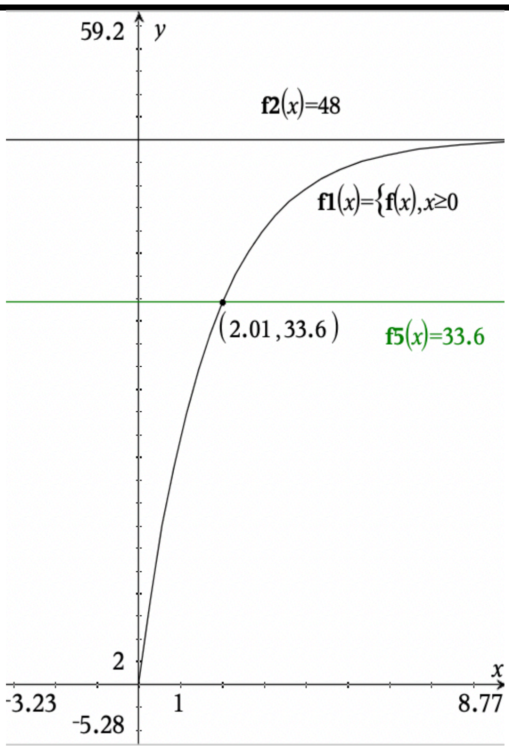
$1-\mathrm{e}^{-0{,}6\,x}=0{,}7 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}6\,x}=0{,}3 \Leftrightarrow -0{,}6\,x=\ln(0{,}3) \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}\ln(0{,}3)$

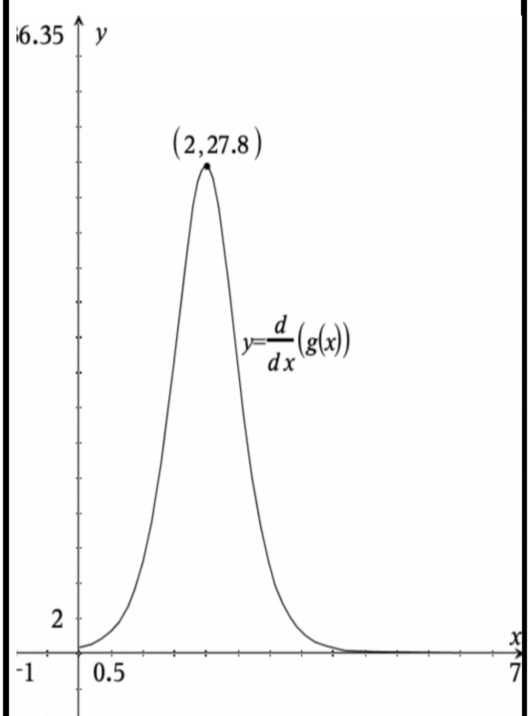
$\Leftrightarrow x \approx 2{,}00662$.

Avec la calculatrice :
$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=33.6,x) \blacktriangleright x=2.00662$

On peut aussi déterminer sur le graphique les coordonnées du point d'intersection du graphique de *f* avec la droite d'équation $y=33{,}6$ (analyse graphique – intersection) : voir ci−dessous.
Le thé est prêt à être consommé après environ 2 minutes.

Équation à résoudre : 1 point.
Détermination du moment où le thé est prêt à être consommé : 2 points.





PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 3/4**	**Barème**

e) Le thé contient aussi du tanin.
La teneur en tanin contenu dans le thé chaud, en fonction du temps, est modélisée par la fonction g définie par

$$g(x)=\frac{37}{1+e^{-3x+6}},$$

où x est le temps, en minutes, après avoir versé l'eau chaude sur les feuilles de thé et $g(x)$ est la teneur en tanin contenu dans le thé chaud exprimée en mg par gramme de thé.
Le goût du thé est optimal lorsque le taux de croissance de la teneur en tanin $g'(x)$ est maximale.
Déterminer à quel moment le goût du thé est optimal. — **4 points**

$$g'(x)=\frac{-37\left(-3e^{-3x+6}\right)}{\left(1+e^{-3x+6}\right)^2}=\frac{111e^{-3x+6}}{\left(1+e^{-3x+6}\right)^2}\ . \quad (1)$$

$g'(x)$ est maximale lorsque sa dérivée s'annule $\Leftrightarrow \left(\dfrac{111e^{-3x+6}}{\left(1+e^{-3x+6}\right)^2}\right)'=0$

$$\Leftrightarrow \frac{111\left(-3e^{-3x+6}\left(1+e^{-3x+6}\right)^2-e^{-3x+6}\cdot 2\left(1+e^{-3x+6}\right)\cdot(-3)e^{-3x+6}\right)}{\left(1+e^{-3x+6}\right)^4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-333e^{-3x+6}\left(1+e^{-3x+6}-2e^{-3x+6}\right)}{\left(1+e^{-3x+6}\right)^3}=0 \Leftrightarrow \frac{-333e^{-3x+6}\left(1-e^{-3x+6}\right)}{\left(1+e^{-3x+6}\right)^3}=0$$

$\Leftrightarrow e^{-3x+6}=1 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2.$
La dérivée de g' s'annule en $x=2$ en changeant de signe (du $+$ au $-$).

Avec la calculatrice :

$\mathbf{g}(x):=\dfrac{37}{1+\mathbf{e}^{-3\cdot x+6}}$ ▸ *Terminé* $\qquad \mathbf{gp}(x):=\dfrac{d}{dx}(\mathbf{g}(x))$ ▸ *Terminé*

$\mathrm{fMax}(\mathbf{gp}(x),x)$ ▸ $x=2$

ou on détermine les coordonnées du point associé au maximum de la fonction g' sur le graphique de g' (analyse graphique – valeur maximum) : voir page précédente.

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 4/4**	**Barème**
ou : $\mathbf{gpp}(x) := \frac{d}{dx}(\mathbf{gp}(x))$ ▸ *Terminé* $\text{solve}(\mathbf{gpp}(x)=0,x)$ ▸ $x=2$ $\text{solve}(\mathbf{gpp}(x)>0,x)$ ▸ $x<2$ $\text{solve}(\mathbf{gpp}(x)<0,x)$ ▸ $x>2$ Donc g' admet un maximum en $x=2$. Conclusion : **le goût du thé est optimal après 2 minutes**.		
Méthode pour déterminer le moment où $g'(x)$ est maximale : 2 points. Calcul éventuel et conclusion : 2 points.		

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 1/3**	**Barème**
Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question. **Une entreprise dispose de deux machines. L'une remplit des canettes avec du jus d'ananas et l'autre remplit des canettes avec du thé glacé.** **Il est exigé que chaque canette contienne** 33 **centilitres (**cl**). Les canettes qui contiennent moins de** 31,5 cl **ou plus de** 34 cl **sont classées comme mal remplies.**		
a) Le volume de jus d'ananas versé dans chaque canette suit une distribution normale de moyenne $\mu = 32{,}5$ cl **et d'écart-type** $\sigma = 0{,}5$ cl. **On choisit au hasard une canette de jus d'ananas.** **Montrer que la probabilité que cette canette soit mal remplie est de** 0,0241**.**		**3 points**
Soit X le volume de jus d'ananas versé dans chaque canette. X suit une loi normale avec $\mu = 32{,}5$ cl et $\sigma = 0{,}5$ cl. $P(X < 31{,}5 \text{ ou } X > 34) = 1 - P(31{,}5 \leq X \leq 34) \approx 1 - 0{,}9759 = 0{,}0241$ ou : $P(X < 31{,}5 \text{ ou } X > 34) = P(X < 31{,}5) + P(X > 34)$ $\approx 0{,}02275 + 0{,}00135 = 0{,}0241$ **Avec la calculatrice** : $1-\text{normCdf}(31.5,34,32.5,0.5)$ $= \text{normCdf}(-\infty,31.5,32.5,0.5)+\text{normCdf}(34,\infty,32.5,0.5) \blacktriangleright \mathbf{0.0241}$ **La probabilité qu'une canette de jus d'ananas soit mal remplie est de 0,0241.**		
$P(...) = 1 - P(...)$ ou $P(...) + P(...)$: 1 point. Calcul : 2 points.		
40 % **des canettes remplies dans l'entreprise contiennent du thé glacé.** 3,25 % **des canettes de thé glacé sont classées comme mal remplies.**		

PARTIE B

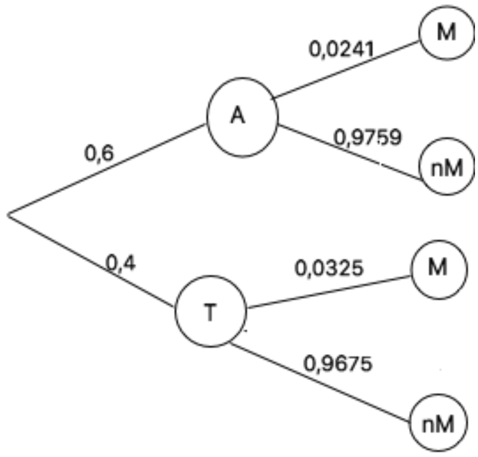
QUESTION B3 PROBABILITÉS	Page 2/3	Barème

b) On choisit au hasard une canette remplie dans l'entreprise.
Montrer que la probabilité que cette canette soit classée comme mal remplie est de $0{,}0275$**.**

On considère les événements :
M : « la canette est classée comme mal remplie »,
A : « la canette contient du jus d'ananas »,
T : « la canette contient du thé glacé ».
Comme $T = \bar{A}$, $P(A) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

$$P(M) = P(M \cap A) + P(M \cap T) = P(A) \cdot P(M|A) + P(T) \cdot P(M|T)$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}0241 + 0{,}4 \cdot 0{,}0325 = 0{,}02746 \approx 0{,}0275.$$

On peut aussi tracer un diagramme en arbre :



La probabilité qu'une canette soit mal remplie est de 0,0275.

Décomposition en « ananas » ou « thé glacé » : 1 point.
Détermination des probabilités 0,6 – 0,4 – 0,0241 – 0,0325 (éventuellement sur un arbre) : 1 point.
Calcul de la probabilité : 1 point.

c) Étant donné qu'une canette choisie au hasard est mal remplie, calculer la probabilité qu'elle contienne du jus d'ananas. — **3 points**

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A) \cdot P(M|A)}{P(M)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}0241}{0{,}02746} \approx 0{,}526584$$

ou, si on a utilisé l'arrondi donné en **b)** : $\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}0241}{0{,}0275} \approx 0{,}525818$.

La probabilité qu'une canette mal remplie contienne du jus d'ananas est d'environ 0,53.

Connaissance de la formule d'une probabilité conditionnelle : 1 point.
Calcul de la probabilité : 2 points.

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 3/3**	**Barème**
Les canettes de jus d'ananas sont conditionnées par paquets de 6 canettes.		
d) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement une canette mal remplie dans un paquet de 6 canettes de jus d'ananas choisi au hasard.		**3 points**
Soit Y le nombre de canettes mal remplies parmi les 6. Y suit une loi binomiale avec $n = 6$ et $p = 0{,}0241$. $P(Y=1) = \binom{6}{1} \cdot 0{,}0241^1 \cdot 0{,}9759^5 = 0{,}127996 \approx 0{,}128$. **Avec la calculatrice** : $\text{binomPdf}(6,0.0241,1) = \mathbf{0.127996} \approx \mathbf{0.128}$ **La probabilité qu'il y ait exactement une canette mal remplie dans un paquet de 6 canettes de jus d'ananas est de 0,128.**		
Reconnaissance de la loi binomiale avec les bons paramètres : 1 point. Calcul dela probabilité : 2 points.		
e) Calculer la probabilité qu'il y ait plus d'une canette mal remplie dans un paquet de 6 canettes de jus d'ananas choisi au hasard.		**3 points**
$P(Y>1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - 0{,}9759^6 - 0{,}127996 \approx 0{,}008167$ $\approx 0{,}0082$. **Avec la calculatrice** : $\text{binomCdf}(6,0.0241,2,6)$ $= 1-\text{binomCdf}(6,0.0241,0,1) \blacktriangleright 0.008167 \approx \mathbf{0.0082}$ **La probabilité qu'il y ait plus d'une canette mal remplie dans un paquet de 6 canettes de jus d'ananas est de 0,0082.**		
$P(...) = 1 - P(...) - P(...)$: 1 point (en cas d'utilisation). Calcul de la probabilité : 2 points (ou 3 si calcul direct).		

PARTIE B

QUESTION B4 STATISTIQUES	Page 1/4	Barème

Utiliser la calculatrice en a), b), c), d) et f).

Le tableau ci-dessous montre la production globale de plastique de 2010 à 2013.

Année		2010	2011	2012	2013
Temps en années après 2010	x	0	1	2	3
Production de plastique en millions de tonnes	y	313	325	338	352

Source: https://www.theatlas.com/charts/BkAVFsjrb

La fonction f définie par

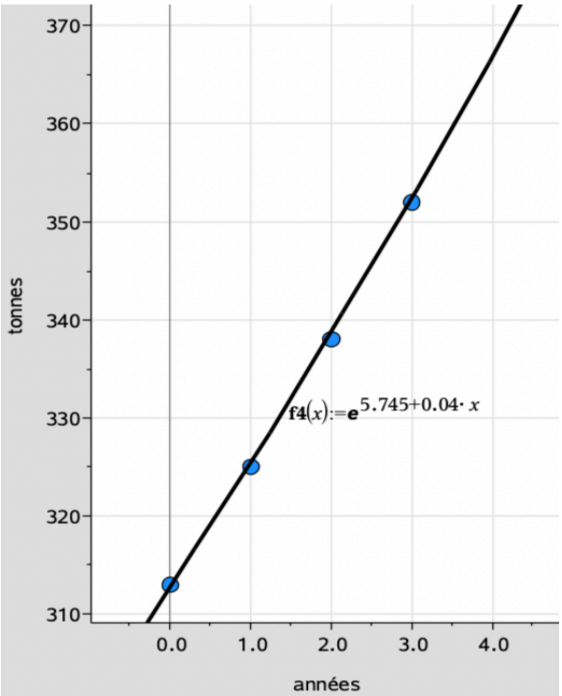
$$f(x) = e^{5{,}745+0{,}040\,x}$$

est un modèle exponentiel basé sur les données du tableau.
$f(x)$ est une estimation de la production de plastique en millions de tonnes au temps x en années après 2010.

a) **Dans un même repère, tracer un graphique en nuage de points représentant les données du tableau ainsi que le graphique de la fonction f.** — **5 points**

Calculatrice :

$f(x) := e^{5.745+0.04\cdot x}$ ▸ *Terminé*



Nuage de points : 2 points.
Graphique de f : 3 points.

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 2/4**	**Barème**

b)	**En utilisant la fonction *f*, estimer la production de plastique pour 2015.**	**2 points**
	En 2015, $x=5$. $f(5)=\mathrm{e}^{5{,}745+0{,}04\cdot 5}=\mathrm{e}^{5{,}945}\approx 381{,}839$. **Avec la calculatrice** : $\mathbf{f}(5)$ ▸ $381.839\approx \mathbf{382}$ En utilisant la fonction *f*, **la production de plastique estimée en 2015 est d'environ 382 millions de tonnes.**	
	Utilisation correcte de la fonction *f* : 1 point. Estimation de la production de plastique en 2015 : 1 point.	
c)	**En utilisant la fonction *f*, estimer en quelle année la production de plastique dépassera, pour la première fois,** 450 **millions de tonnes.**	**3 points**
	On résout l'inéquation $f(x)>450 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{5{,}745+0{,}04\,x}>450 \Leftrightarrow 5{,}745+0{,}04\,x>\ln(450)$ $\Leftrightarrow x>\dfrac{\ln(450)-5{,}745}{0{,}04} \Leftrightarrow x>9{,}10619$. Il faut considérer le plus petit entier *x* qui vérifie cette inéquation, d'où $x=10$. Comme la fonction *f* est strictement croissante, on peut résoudre simplement l'équation $f(x)=450 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=9{,}10619$ et on considère le plus petit entier qui lui est strictement supérieur : 10. **Avec la calculatrice** : solve($\mathbf{f}(x)>450,x$) ▸ $x>9.10619$ ou solve($\mathbf{f}(x)=450,x$) ▸ $x=9.10619$ Vérification : $\mathbf{f}(9)$ ▸ 448.093 et $\mathbf{f}(10)$ ▸ 466.38 **La production de plastique dépassera pour la première fois 450 millions de tonnes en 2020.**	
	Équation ou inéquation à résoudre : 1 point. Résolution et conclusion : 2 points.	

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 3/4**	**Barème**

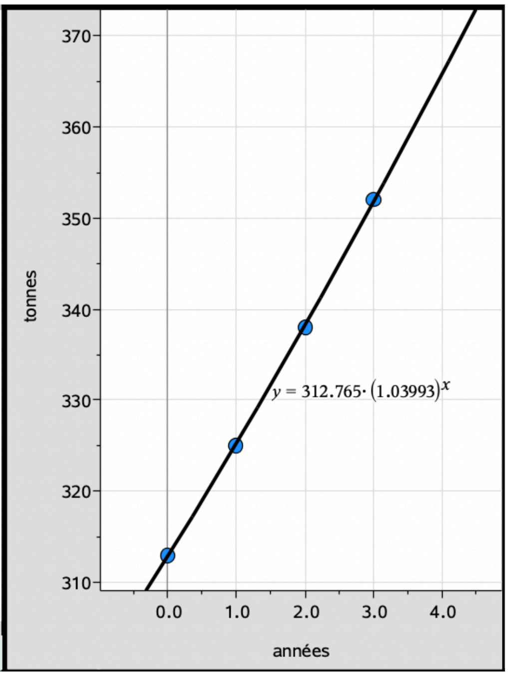
d) **Établir une équation de la forme $y = a \cdot b^x$ de la régression exponentielle de y en x en utilisant les données du tableau. Arrondir le nombre b au dix-millième (4 décimales).** — **4 points**

Avec la calculatrice : voir tableau et graphique (non demandé aux élèves) ci-dessous.

On obtient l'équation $y = 312{,}765 \cdot 1{,}03993^x$ et $b \approx 1{,}0399$.

	A an...	B to...	C	D	E
=				=ExpReg('années	
1	0	313	Titre	Régression expo...	
2	1	325	RegEq..	a*b^x	
3	2	338	a	312.765	
4	3	352	b	1.03993	
5			r²	0.999713	
6			r	0.999857	
7			Resid	{0.23545322396...	
8			ResidT..	{7.52529801470...	
9					
10					
11					
12					
13					
14					

D1 ="Régression exponentielle "



Pour e) et f), utiliser le modèle de régression exponentielle g, où

$$g(x) = 313 \cdot 1{,}040^x.$$

e) **Quel est le taux de croissance annuel en pourcentage selon le modèle g ?** — **3 points**

D'une année à la suivante, selon le modèle g, la production de plastique est multipliée par $1{,}04 = 1 + 0{,}04$.

Selon le modèle g, **le taux de croissance est de 4 % par an**.

Réponse : 2 points.
Justification : 1 point.

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 4/4**	**Barème**
f) En utilisant chacun des deux modèles, estimer la production de plastique en 2020. Commenter les résultats.		**3 points**
En 2020, $x=10$. $f(10)=e^{5,745+0,04\cdot 10}=e^{6,145}\approx 466,38$. $g(10)=313\cdot 1,04^{10}\approx 463,316$. **Avec la calculatrice** : $\mathbf{g}(x):=313\cdot(1.04)^{x}$ ▸ *Terminé* $\quad$ $\mathbf{f}(10)$ ▸ 466.38 et $\mathbf{g}(10)$ ▸ 463.316 **Selon le modèle *f*, la production de plastique estimée en 2020 est de 466,38 millions de tonnes et selon le modèle *g*, elle est de 463,316 millions de tonnes.** **Avec la calculatrice** : $\mathbf{e}^{5.745+0.04\cdot x}$ ▸ $312.624\cdot(1.04081)^{x}$ ou $\mathbf{f}(x)$ ▸ $312.624\cdot(1.04081)^{x}$ $f(x)=312,624\cdot(1,04081)^{x}\approx 313\cdot 1,04^{x}=g(x)$. **Les deux modèles *f* et *g* sont approximativement les mêmes.**		
Calcul de $f(10)$ et $g(10)$: 2 points. Commentaire : 1 point.		