AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE A

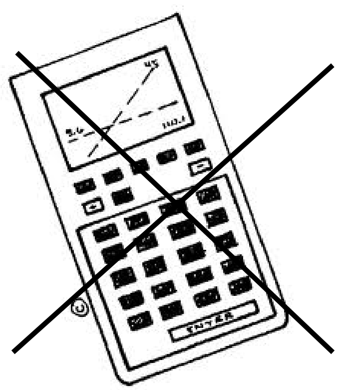
DATE : 12 juin 2023, après-midi

DURÉE DE L'EXAMEN :

2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen sans support technologique
Crayon pour les graphiques
Formelsammlung / Formula booklet / Recueil de formules

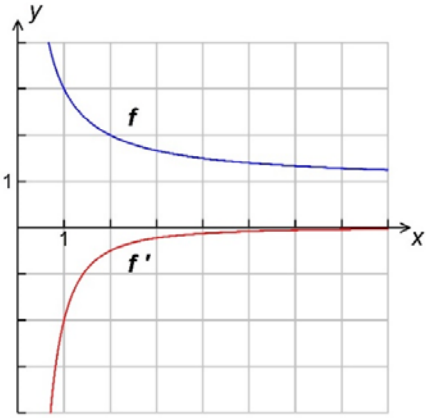


REMARQUES PARTICULIÈRES :

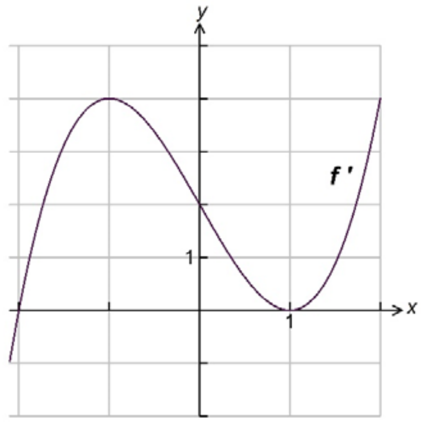
- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées des explications nécessaires à leur élaboration.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Lorsque des graphes sont utilisés pour trouver une solution, la réponse doit inclure des esquisses de ceux-ci.

- Sauf indication contraire dans la question, la totalité des points ne pourra être attribuée à une réponse correcte en l'absence du raisonnement et des explications qui permettent d'arriver aux résultats ou solutions.

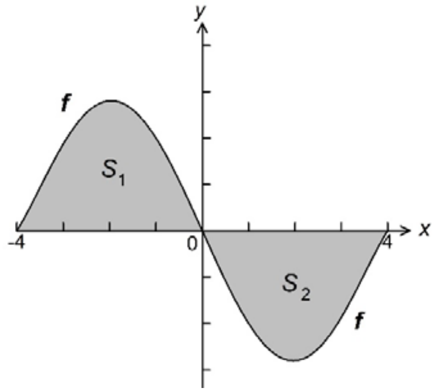
- Lorsqu'une réponse est incorrecte, une partie des points pourra cependant être attribuée lorsqu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte ont été utilisées.

PARTIE A	Page 1/12	Barème
1) Le diagramme ci-dessous montre le graphique d'une fonction *f* et celui de sa dérivée f'.  **Déterminer** et **interpréter** graphiquement : a) le taux de variation moyen de la fonction *f* de $x_1 = 1$ à $x_2 = 2$.		2 points
$P_1(x_1\ ;y_1)$ et $P_2(x_2\ ;y_2)$ sont des points du graphique de *f*. Par lecture graphique : $y_1 = f(x_1) = 3$ et $y_2 = f(x_2) = 2$. Le taux de variation moyen de la fonction *f* de $x_1 = 1$ à $x_2 = 2$ est $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{2-1} = -1$. Ce résultat peut être lu directement sur le graphique : pour aller de P_1 à P_2, on peut se déplacer d'une unité vers la droite (direction positive) parallèlement à l'axe des abscisses et ensuite d'une unité vers le bas (direction négative) parallèlement à l'axe des ordonnées. Donc $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$. C'est la pente de la sécante $(P_1\ P_2)$ au graphique de *f*.		
Calcul du taux moyen de variation : 1 point Interprétation graphique : 1 point		

PARTIE A	Page 2/12	Barème
b) le taux de variation instantané de la fonction *f* en $x_1 = 1$.		3 points
Le taux de variation instantané de la fonction *f* en $x_1 = 1$ égale $f'(1)$. Par lecture graphique : $f'(1) = -2$. C'est la pente de la tangente au graphique de *f* au point P_1 d'abscisse $x_1 = 1$.		
Traduction du taux de variation instantané en $x_1 = 1$ par $f'(1)$: 1 point Lecture de $f'(1)$: 1 point Interprétation graphique : 1 point		

PARTIE A	Page 3/12	Barème
2) On considère une fonction dérivable *f*. La figure ci-dessous montre le graphique de sa dérivée f' pour $-2{,}1 \leq x \leq 2$.  Pour chacune des affirmations suivantes, **justifier** si elle est vraie ou fausse. a) La fonction *f* est décroissante pour $-1 \leq x \leq 1$. b) La fonction *f* admet un minimum en $x = -2$. c) Il y a une tangente horizontale au graphique de *f* au point d'abscisse $x = 1$. d) La pente de la tangente au graphique de *f* en son point d'intersection avec l'axe des ordonnées est égale à 2. e) Le graphique de *f* admet trois tangentes horizontales pour $-2{,}1 \leq x \leq 2$.		
a) FAUX : Pour $-1 \leq x \leq 1$, $f'(x) \geq 0$. Donc *f* est croissante pour $-1 \leq x \leq 1$. b) VRAI : $f'(-2) = 0$ et f' change de signe (de $-$ à $+$) quand *x* passe par -2. Dès lors *f* admet un minimum en $x = -2$. c) VRAI : $f'(1) = 0$. Donc il y a une tangente horizontale au graphique de *f* au point d'abscisse $x = 1$. d) VRAI : $f'(0) = 2$. Dès lors la pente de la tangente au graphique de *f* en son point d'intersection avec l'axe des ordonnées est égale à 2. e) FAUX : $f'(x) = 0$ (pour $-2.1 \leq x \leq 2$) $\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$. Dès lors le graphique de *f* n'a que deux tangentes horizontales pour $-2{,}1 \leq x \leq 2$.		
1 point pour chaque affirmation		

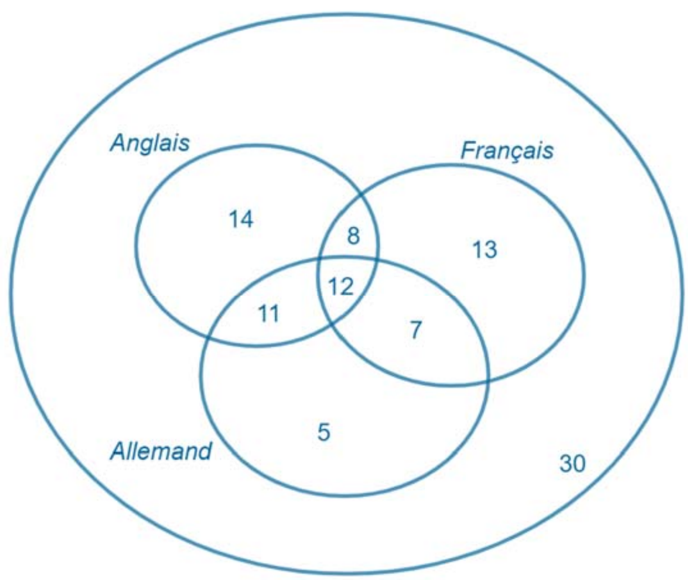
PARTIE A	Page 4/12	Barème
3) On considère les fonctions f et F définies par $f(x)=4x^3+3x^2$ et $F(x)=x^4+x^3+5$. a) **Montrer** que F est une primitive de f.		2 points
$F'(x)=(x^4+x^3+5)'=4x^3+3x^2=f(x)$. Dès lors F est une primitive de f.		
b) **Calculer** $\int_1^2 f(x)dx$.		3 points
F étant une primitive de f, la fonction G définie par $G(x)=x^4+x^3$ est aussi une primitive de f. Dès lors $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (4x^3+3x^2)dx=\left[x^4+x^3\right]_1^2=(16+8)-(1+1)=22$. Note : L'utilisation de F comme primitive de f lors du calcul de l'intégrale est également acceptée.		
Écriture correcte de l'intégration : 2 points Calcul numérique : 1 point		

PARTIE A	Page 5/12	Barème
4) La figure ci-dessous montre le graphique d'une fonction *f* et deux surfaces S_1 et S_2 délimitées par le graphique de *f* et l'axe des abscisses. Le graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.  On donne : $\int_{-4}^{0} f(x)dx = 7$. a) **Interpréter** l'intégrale $\int_{-4}^{0} f(x)dx$ graphiquement.		2 points
$\int_{-4}^{0} f(x)dx$ est l'aire de la surface délimitée par le graphique de *f* et l'axe des abscisses pour $-4 \leq x \leq 0$, c'est-à-dire l'aire de S_1.		
b) **Déterminer** 1. $\int_{0}^{4} f(x)dx$. 2. $\int_{-4}^{4} f(x)dx$. 3. l'aire de la surface S_2.		3 points
1. $\int_{0}^{4} f(x)dx = -7$ (par symétrie du graphique par rapport à l'origine). 2. $\int_{-4}^{4} f(x)dx = \int_{-4}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = 7 + (-7) = 0$. 3. Les surfaces S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à l'origine. Donc S_2 a la même aire que S_1 c'est-à-dire 7 unités d'aire.		
1 point pour chaque sous-question		

PARTIE A	Page 6/12	Barème
5) On est en train de vider une piscine et le volume d'eau qui reste peut être modélisé par la fonction *V* donnée par $V(t)=5000\cdot 0{,}60^{t}$, $t\geq 0$, où le temps *t* est mesuré en heures et *V*(*t*), mesuré en litres, est le volume d'eau restant à l'instant *t*. La vidange de la piscine commence à l'instant $t=0$. a) **Déterminer** le volume d'eau dans la piscine au départ et après 1 heure.		2 points
$V(0)=5000\cdot 0{,}60^{0}=5000.$ Le volume d'eau dans la piscine au départ est de 5000 litres. $V(1)=5000\cdot 0{,}60^{1}=3000.$ Le volume d'eau dans la piscine après 1 heure est de 3000 litres.		
1 point pour chaque volume		
b) **Calculer** en pourcentage le taux auquel le volume d'eau diminue par heure.		2 points
$\frac{V(t+1)}{V(t)}=\frac{5000\cdot 0{,}60^{t+1}}{5000\cdot 0{,}60^{t}}=0{,}60.$ (Note : Ce calcul n'est pas exigé) Autrement dit : en une heure le volume d'eau dans la piscine est multiplié par 0,60. Le taux de diminution du volume d'eau dans la piscine est donc de 40% par heure. Note: On peut aussi utiliser la règle $a=1+r$, où *a* est la base et *r* le taux de variation.		
Explication : 1 point Détermination du pourcentage : 1 point		
c) **Expliquer** ce que le modèle nous révèle à propos du volume d'eau restant après un temps très long.		1 point
$\lim_{t\to\infty}V(t)=5000\cdot 0=0.$ Par conséquent, selon le modèle, il ne restera plus d'eau dans la piscine après un temps infini. Remarques : D'autres réponses doivent être acceptées. Par exemple : il restera toujours une petite quantité d'eau car la limite zéro ne signifie pas que la valeur 0 est atteinte. Elle tend seulement vers zéro. Les candidats peuvent également se demander si un modèle est réaliste sur un temps infini. Ces réponses sont acceptées même si elles ne sont pas exigées dans cette question.		

PARTIE A	Page 7/12	Barème
6) a) **Calculer** de combien de façons les lettres du mot PARIS peuvent être ordonnées.		2 points
Le nombre de permutations de n objets distincts sans répétition est $n!$ Donc le nombre de permutations des 5 lettres du mot PARIS est $5! = 120$. Les 5 lettres du mot PARIS peuvent être ordonnées de 120 façons.		
Écriture de la formule adéquate : 1 point Calcul : 1 point		
b) **Calculer** combien de "mots" (n'ayant pas nécessairement un sens) de 3 lettres différentes on peut écrire en utilisant les lettres du mot PARIS.		3 points
Le nombre d'arrangements sans répétition de k objets choisis parmi n objets distincts est $\frac{n!}{(n-k)!}$. Donc le nombre d'arrangements de 3 lettres différentes choisies parmi les 5 lettres de PARIS est $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. On peut écrire 60 “mots” de 3 lettres différentes choisies parmi les 5 lettres du mot PARIS.		
Écriture de la formule adéquate : 1 point Calcul : 2 points		

PARTIE A	Page 8/12	Barème
7) Une enquête auprès de 100 étudiants s'inscrivant dans une université montre que • 45 parlent l'anglais • 40 parlent le français • 35 parlent l'allemand • 20 parlent à la fois l'anglais et le français • 23 parlent à la fois l'anglais et l'allemand • 19 parlent à la fois le français et l'allemand • 12 parlent les trois langues. En utilisant un diagramme de Venn ou un autre procédé, **déterminer** la probabilité qu'un élève choisi au hasard parmi ces 100 élèves ne parle qu'une seule de ces trois langues.		5 points



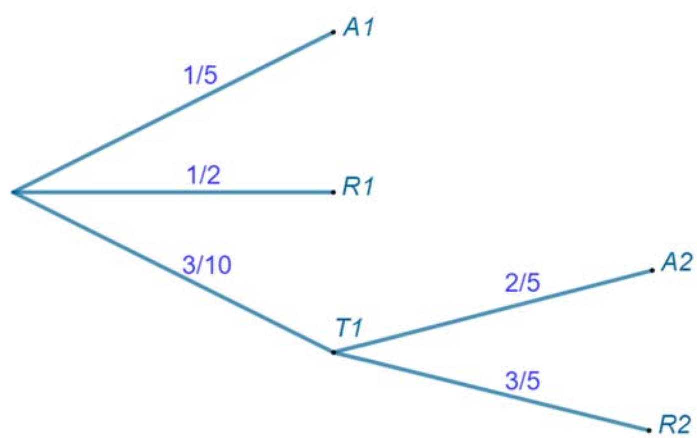
P(seulement l'anglais ou seulement le français ou seulement l'allemand)

$= P$(seulement l'anglais) $+$ P(seulement le français) $+ P$(seulement l'allemand)

$$= \frac{14}{100} + \frac{13}{100} + \frac{5}{100} = \frac{32}{100}.$$

La probabilité qu'un élève choisi au hasard parmi les 100 élèves ne parle qu'une seule des trois langues égale $\frac{32}{100} = 0{,}32$.

Utilisation d'un diagramme de Venn correct (ou d'une autre méthode) : 3 points
Calcul de la probabilité : 2 points

PARTIE A	Page 9/12	Barème
8) Les candidats à un emploi dans une grande entreprise doivent passer un test d'aptitude. Ils sont • soit acceptés avec une probabilité de $\frac{1}{5}$ • soit refusés avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ • soit retestés avec une probabilité de $\frac{3}{10}$. Lorsqu'ils sont retestés, il n'y a que deux résultats : l'acceptation avec une probabilité de $\frac{2}{5}$ ou le refus avec une probabilité de $\frac{3}{5}$. a) **Tracer** un diagramme en arbre pour illustrer les résultats.		2 points
Soient les événements : A_1: "accepté après le premier essai" R_1: "rejeté après le premier essai" T_1: "retesté après le premier essai" A_2: "accepté après le second essai" R_2: "rejeté après le second essai"  		
b) **Déterminer** la probabilité qu'un candidat sélectionné au hasard soit accepté.		3 points
$P(\text{accepté}) = P(A_1) + P(T_1) \cdot P(A_2 \mid T_1) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5+3}{25} = \frac{8}{25} = 0{,}32.$ La probabilité qu'un candidat sélectionné au hasard soit accepté égale $\frac{8}{25}$ ou 0,32. Note : les candidats sont libres d'utiliser le diagramme en arbre ou les formules.		
Utilisation correcte du diagramme en arbre ou des formules : 2 points Calcul : 1 point		

<table>
<tr><th>PARTIE A</th><th>Page 10/12</th><th>Barème</th></tr>
<tr><td colspan="2">9) On lance une pièce de monnaie biaisée plusieurs fois.
À chaque lancer, la probabilité d'obtenir face est de $\frac{1}{3}$.
a) S'agit-il d'un processus de Bernoulli ? Justifier la réponse.</td><td>2 points</td></tr>
<tr><td colspan="2">Oui. Nous avons une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli : les lancers de la pièce.
Chaque lancer de la pièce est une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire une expérience qui a exactement deux résultats : succès=face ou échec=pile.
La probabilité de succès est la même à chaque épreuve : $p=\frac{1}{3}$.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Oui : 0,5 point
0,5 point pour chacun des trois arguments de la justification</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) On lance la pièce 3 fois.
Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 fois face.</td><td>2 points</td></tr>
<tr><td colspan="2">Soit X le nombre de fois qu'on obtient face.
X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{3}$.
$P(X=2)=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.
La probabilité d'obtenir exactement 2 fois face est égale à $\frac{2}{9}$.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Reconnaissance de la loi binomiale et de ses paramètres : 1 point
Calcul de la probabilité : 1 point</td></tr>
<tr><td colspan="2">c) On lance la pièce 60 fois.
Calculer l'espérance du nombre de fois qu'on obtient face.</td><td>1 point</td></tr>
<tr><td colspan="2">Soit Y le nombre de fois qu'on obtient face.
Y suit une loi binomiale de paramètres $n=60$ et $p=\frac{1}{3}$.
$E(X)=n\cdot p=60\cdot\frac{1}{3}=20$.
L'espérance du nombre de fois qu'on obtient face est égale à 20.</td><td></td></tr>
</table>

PARTIE A	Page 11/12	Barème
10) Une machine produit des billes d'acier. Le diamètre des billes suit une distribution normale de moyenne $\mu = 18{,}0$ mm et d'écart-type $\sigma = 0{,}5$ mm. On choisit une bille au hasard. a) **Déterminer** la probabilité que son diamètre soit compris entre 17,0 mm et 19,0 mm.		1 point
Soit X le diamètre d'une bille. a) $P(17{,}0 \leq X \leq 19{,}0) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$. La probabilité que le diamètre de la bille soit compris entre 17,0 mm et 19,0 mm est égale à environ 0,95 ou 95 %.		
b) **Déterminer** la probabilité que son diamètre soit compris entre 17,0 mm et 18,5 mm.		2 points
$P(17{,}0 \leq X \leq 18{,}5) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + \sigma) =$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) - P(\mu + \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx$ $0{,}95 - (0{,}16 - 0{,}025) = 0{,}815$. Ou : $P(17{,}0 \leq X \leq 18{,}5) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + \sigma) =$ $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) + P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu - \sigma) \approx$ $0{,}68 + (0{,}16 - 0{,}025) = 0{,}815$. Ou : $P(17{,}0 \leq X \leq 18{,}5) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + \sigma) =$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu) + P(\mu \leq X \leq \mu + \sigma) \approx$ $\frac{0{,}95}{2} + \frac{0{,}68}{2} = 0{,}475 + 0{,}34 = 0{,}815$. La probabilité que le diamètre de la bille soit compris entre 17,0 mm et 18,5 mm est égale à environ 0,815 ou 81,5 %.		
Utilisation de probabilités connues : 1 point Calcul de la probabilité demandée : 1 point		

PARTIE A	Page 12/12	Barème
c) On prélève au hasard un lot de 400 billes d'acier dans cette production et on mesure le diamètre de chaque bille. Si le diamètre d'une bille est inférieur à 17,0 mm, elle est rejetée. **Estimer** combien de billes seront rejetées.		2 points
$P(X < 17{,}0) \approx 0{,}025.$ Soit Y le nombre de billes rejetées parmi les 400. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}025.$ Le nombre de billes rejetées peut être estimé comme suit : $E(Y) = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}025 = 10.$ Le nombre de billes rejetées est estimé à 10.		
Reconnaissance de la loi binomiale et de ses paramètres : 1 point Calcul de l'espérance et conclusion : 1 point		