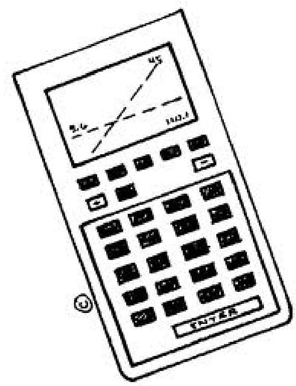
BACCALAURÉAT EUROPÉEN 2023

AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE B

DATE : 12 juin 2023, matin



DURÉE DE L'EXAMEN :

2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen avec support technologique :

Calculatrice approuvée

Crayon pour les graphiques

Formelsammlung / Formula booklet / Recueil de formules

REMARQUES PARTICULIÈRES:

- Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées des explications nécessaires à leur élaboration.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Lorsque des graphes sont utilisés pour trouver une solution, la réponse doit inclure des esquisses de ceux-ci.
- Sauf indication contraire dans la question, la totalité des points ne pourra être attribuée à une réponse correcte en l'absence du raisonnement et des explications qui permettent d'arriver aux résultats ou solutions.
- Lorsqu'une réponse est incorrecte, une partie des points pourra cependant être attribuée lorsqu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte ont été utilisées.

PARTIE B

QUESTION B1	Page 1/5	Barème
Partie 1 Marie exploite une ferme. La production laitière de la ferme peut être modélisée par la fonction *f* donnée par $f(x) = -0{,}0028x^2 + 0{,}57x$, $50 \le x \le 90$, où x est le nombre de vaches de l'exploitation et $f(x)$ représente la production laitière journalière moyenne mesurée en hL (1 hL $= 1$ hectolitre $= 100$ litres). a) **Calculer** la production laitière journalière moyenne de 70 vaches.		2 points
La calculatrice donne : $f(70) = 26{,}18.$ La production laitière journalière moyenne de 70 vaches est de 26,18 hectolitres (2618 litres).		
Écriture de $f(70)$: 1 point Calcul et conclusion : 1 point		
b) **Déterminer** le nombre de vaches dont Marie a besoin pour maintenir une production laitière journalière moyenne de 25 hL ou plus.		3 points
Représentation mathématique de la situation : $f(x) \ge 25$ avec $50 \le x \le 90.$ À l'aide de la calculatrice, on trouve : $63{,}95 \le x \le 90.$ Il faut au moins 64 vaches pour maintenir une production laitière journalière moyenne de 25 hL ou plus.		
Représentation mathématique : 1 point Détermination de l'intervalle : 1 point Conclusion : 1 point		
c) Le modèle peut-il être étendu à 205 vaches ? **Justifier** la réponse.		2 points
La calculatrice donne : $f(205) = -0{,}82.$ En utilisant ce modèle, nous trouverions une production laitière journalière moyenne négative pour 205 vaches. Ce modèle ne s'applique pas à un grand nombre de vaches.		
Calcul de $f(205)$: 1 point Justification : 1 point		

PARTIE B		
QUESTION B1	**Page 2/5**	**Barème**
Partie 2 d) La production laitière journalière d'été par vache suit une distribution normale de moyenne $\mu = 48$ litres et d'écart-type $\sigma = 16$ litres. **Calculer** la probabilité qu'une vache choisie au hasard produise plus de 40 litres de lait un jour d'été. Donner la réponse à 0,001 près (3 décimales).		2 points
La variable aléatoire X désigne la production laitière journalière d'été par vache. X suit une distribution normale de moyenne $\mu = 48$ litres et d'écart-type $\sigma = 16$ litres. À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(X > 40) \approx 0{,}691.$ La probabilité qu'une vache choisie au hasard produise plus de 40 litres de lait un jour d'été est d'environ 0,691 ou 69,1 %.		
Écriture de $P(X > 40)$: 1 point Calcul et conclusion : 1 point		
e) On suppose que la probabilité qu'une vache choisie au hasard produise plus de 40 litres de lait par jour est égale à 0,69. Actuellement, Marie possède 80 vaches. **Calculer** la probabilité que moins de 60 de ces vaches produisent plus de 40 litres de lait par jour.		2 points
La variable aléatoire Y désigne le nombre de vaches qui produisent plus de 40 litres de lait par jour. Y suit une distribution binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}69$. À l'aide de la calculatrice, on obtient : $P(Y < 60) = P(Y \leq 59) \approx 0{,}851.$ La probabilité que moins de 60 de ces vaches produisent plus de 40 litres de lait par jour est d'environ 0,851 ou 85,1%.		
Écriture de $P(Y \leq 59)$: 1 point Calcul et conclusion : 1 point		

PARTIE B

QUESTION B1	**Page 3/5**	**Barème**

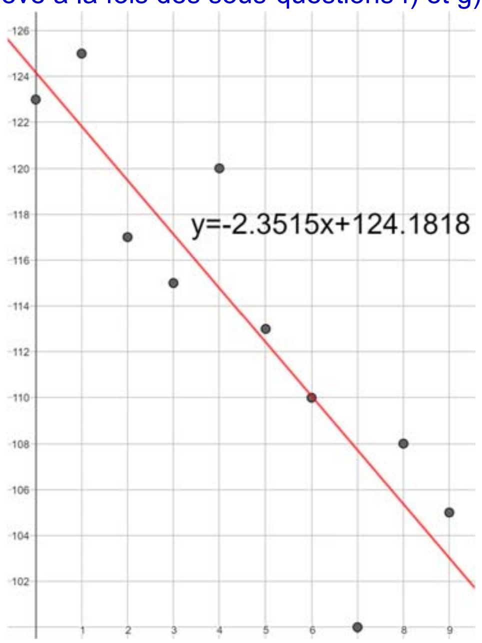
Partie 3

Le tableau ci-dessous montre les précipitations annuelles (mesurées en cm) sur l'exploitation au cours des 10 dernières années.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
$x =$ années après 2013	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y =$ précipitations (cm)	123	125	117	115	120	113	110	100	108	105

f) **Tracer** un nuage de points pour représenter les données du tableau et, en interprétant ce diagramme, **décrire** la corrélation. — 4 points

La figure ci-dessous relève à la fois des sous-questions f) et g).



Lorsque les abscisses augmentent, les ordonnées diminuent. Au fil des ans, les précipitations annuelles moyennes en cm dans l'exploitation ont diminué. Il existe une corrélation négative assez forte.

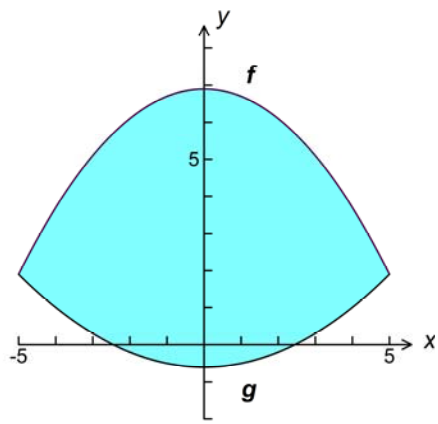
Nuage de points : 2 points
Description de la corrélation : 2 points.

<table>
<tr><th colspan="3">PARTIE B</th></tr>
<tr><th>QUESTION B1</th><th>Page 4/5</th><th>Barème</th></tr>
<tr><td colspan="2">g) Établir une équation de la forme $y = m \cdot x + b$ de la régression linéaire de y en x en utilisant les données du tableau.
Tracer la droite de régression sur le même diagramme.</td><td>4 points</td></tr>
<tr><td colspan="2">À l’aide de la calculatrice, on obtient l’équation suivante pour la régression linéaire : $y = -2,3515x + 124,1818$.
Tracé de la droite de régression sur le nuage de points : voir ci-dessus.
Des résultats tels que $y = -2,35x + 124,18$ ou $y = -2,35x + 124$ sont admissibles et même plus appropriés.
(Les élèves qui donnent trop de nombres décimaux ne doivent pas être pénalisés).</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Détermination d’une équation de la droite de régression : 2 points
Tracé de la droite de régression sur le diagramme : 2 points</td></tr>
<tr><td colspan="2">h) Expliquer pourquoi un modèle de régression linéaire pourrait ne pas être approprié à ces données sur un grand nombre d’années.</td><td>2 points</td></tr>
<tr><td colspan="2">Il y a plusieurs façons similaires de répondre.
Par exemple :
• Après une longue période, les précipitations deviendraient nulles ou même négatives.
Ou :
• En 2066, nous aurions une quantité négative de précipitations : $x = 53 \Rightarrow y = -0,4477$.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Explication : 2 points</td></tr>
</table>

PARTIE B		
QUESTION B1	**Page 5/5**	**Barème**

Partie 4

Il y a un étang sur la propriété, dont le diagramme se trouve ci-dessous (1 unité = 1 mètre) :



Les bords de cet étang sont représentés par les graphiques des fonctions f et g définies par

$f(x) = -0{,}2x^2 + 6{,}9$, $-5 \leq x \leq 5$ pour le bord supérieur et

$g(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}6$, $-5 \leq x \leq 5$ pour le bord inférieur.

i) **Calculer** l'aire de la surface de cet étang. — 4 points

L'aire A (en m²) de la surface de cet étang est donnée par

$A = \int_{-5}^{5} \left[\left(-0{,}2x^2 + 6{,}9\right) - \left(0{,}1x^2 - 0{,}6\right) \right] dx$. (voir recueil de formules)

À l'aide de la calculatrice, on obtient $A = 50$.

L'aire de la surface de l'étang est de 50 m².

Écriture de la formule adéquate : 1 point
Calcul de l'intégrale : 2 points
Conclusion : 1 point

PARTIE B

QUESTION B2	**Page 1/5**	**Barème**

Partie 1

a) En août 2021, les trajets effectués dans le système de partage de vélos d'Helsinki avaient une distance moyenne de 2,25 km et un écart type de 16,04 km.

Expliquer ce qui a pu causer un si grand écart-type.

Vélos publics à Helsinki

2 points

L'écart-type nous renseigne sur la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne. Dans cet exemple, l'écart-type est très élevé, ce qui signifie qu'au moins certains voyages ont été très longs.

Explication : 2 points

b) Sur une certaine période, la durée moyenne des déplacements était de $\mu = 645$ secondes et l'écart-type était de $\sigma = 271$ secondes.
On suppose que la durée des trajets suit une distribution normale.
Calculer la probabilité qu'un trajet ait duré plus de 12 minutes.

3 points

X désigne la durée d'un trajet. *X* suit une distribution normale de moyenne $\mu = 645$ secondes et d'écart-type $\sigma = 271$ secondes.
$12 \text{ min} = 720 \text{ s}$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient :
$P(\text{un trajet dure plus de 720 secondes}) = P(X > 720) \approx 0{,}391$.
La probabilité qu'un trajet ait duré plus de 12 minutes est d'environ 0,391 ou 39,1 %.

Écriture de $P(X > 720)$: 1 point
Calcul et conclusion : 2 points

PARTIE B		
QUESTION B2	**Page 2/5**	**Barème**
Partie 2 Une étude couvrant la période 2009-2019 a montré que la vente de vélos électriques dans l'Union européenne peut être modélisée par la fonction N donnée par $N(t)=0{,}0756\cdot e^{0{,}163t+2{,}03}$, où t est le nombre d'années après 2009 et $N(t)$ est le nombre de vélos électriques vendus, en millions. c) **Réécrire** la formule de $N(t)$ sous la forme $N(t)=K\cdot A^t$.		2 points
$N(t)=0{,}0756\cdot e^{0{,}163t+2{,}03}=\left(0{,}0756\cdot e^{2{,}03}\right)\cdot e^{0{,}163t}$ $\left.\begin{array}{l}\approx 0{,}576\cdot(e^{0{,}163})^t\\ \approx 0{,}576\cdot 1{,}177^t\end{array}\right\}$ (à l'aide de la calculatrice).		
Isolation de $e^{2{,}03}$: 1 point Indication de la forme demandée : 1 point		
d) **Déterminer**, d'après ce modèle, le pourcentage annuel d'augmentation des ventes de vélos électriques.		2 points
$N(t)=0{,}576\cdot(1+0{,}177)^t$. Dès lors, le pourcentage annuel d'augmentation des ventes de vélos électriques s'élève à 17.7%. Ou : $\dfrac{N(t+1)}{N(t)}=\dfrac{0{,}0756\cdot e^{0{,}163(t+1)+2{,}03}}{0{,}0756\cdot e^{0{,}163t+2{,}03}}=e^{0{,}163}\approx 1{,}177\ \ldots$ (à l'aide de la calculatrice)		
e) Depuis 2009, le nombre total de vélos (y compris les vélos électriques) vendus en Europe est resté à peu près constant à 20 millions de vélos par an. **Estimer** l'année à partir de laquelle le nombre de vélos électriques vendus représentera plus de la moitié du nombre total de vélos vendus.		3 points
La moitié de 20 millions = 10 millions. On résout l'équation $N(t)=10$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $t\approx 17{,}5$. On contrôle les années 2026 $(t=17)$ et 2027 $(t=18)$: $N(17)\approx 9{,}2$ et $N(18)\approx 10{,}8$ Par conséquent, à partir de 2027, plus de 10 millions de vélos électriques seront vendus, représentant plus de la moitié du nombre total de vélos vendus.		
Calcul de la moitié de 20 millions et écriture de l'équation $N(t)=10$: 1 point Résolution de l'équation : 1 point Estimation de l'année : 1 point.		
PARTIE B		

QUESTION B2	Page 3/5	Barème
Partie 3 La hauteur $h(t)$ en centimètres (cm) d'une pédale de vélo au-dessus du sol au temps *t*, en secondes, est définie par $h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + d$. f) La hauteur maximale de la pédale est de 49 cm et la hauteur minimale est de 9 cm. **Déterminer** *a* et *d*.		3 points
L'amplitude *a* est la moitié de la distance entre les hauteurs maximale et minimale de la pédale (la longueur de la manivelle) : $a = \dfrac{49-9}{2} = 20$. Le déplacement vertical $d = 9 + 20 = 29$. Dès lors, l'amplitude est de 20 centimètres et le déplacement vertical est de 29 centimètres.		
Détermination de *a* : 1 point Détermination de *d* : 1 point Conclusion avec unités : 1 point		
g) Le temps nécessaire pour effectuer une rotation complète de la pédale est de 1,5 seconde. **Calculer** *b*. **Expliquer** quelle information *b* donne sur la rotation de la pédale.		3 points
$p = \dfrac{2\pi}{b} \Leftrightarrow 1{,}5 = \dfrac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = \dfrac{2\pi}{1{,}5} \Leftrightarrow b = \dfrac{4\pi}{3}$. La pédale se déplace de $\dfrac{4\pi}{3}$ radians par seconde ou de 240° par seconde.		
Calcul de *b* : 2 points Explication : 1 point		

PARTIE B		
QUESTION B2	**Page 4/5**	**Barème**
Partie 4 Sur un site web (Euro-Velo) consacré aux cycloroutes de longue distance en Europe, la Route du Rhin a été l'itinéraire le plus visité. En 2020, 142124 des 1644417 visiteurs du site web ont visité la Route du Rhin. En 2021, sur un échantillon aléatoire de 2000 visiteurs du site web, 156 ont visité la Route du Rhin. L'organisation Euro-Velo se demande si la proportion de personnes ayant visité la Route du Rhin a diminué de 2020 à 2021. Elle effectue donc un test d'hypothèse à un seuil de signification de 5 %. *p* désigne la proportion de tous les visiteurs du site web qui ont visité la Route du Rhin en 2021. h) **Vérifier** que l'hypothèse nulle de ce test est $H_0 : p = 0{,}086$.		2 points
L'hypothèse nulle H_0 est l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de différence entre les proportions de personnes visitant la Route du Rhin en 2020 et en 2021. En 2020, la proportion de visiteurs du site web qui ont visité la Route du Rhin est de $\frac{142124}{1644417} \approx 0{,}08643$. Par conséquent : $H_0 : p \approx 0{,}086$.		
Explication de la signification de l'hypothèse nulle : 1 point Détermination de H_0 : 1 point		
i) **Déterminer** si le test est unilatéral à gauche ou à droite. **Justifier** la réponse.		2 points
L'organisation souhaite savoir si la proportion de personnes visitant la Route du Rhin a diminué de 2020 à 2021. Il s'agit donc d'un test à gauche.		
Argumentation : 1 point Conclusion : 1 point		

PARTIE B		
QUESTION B2	**Page 5/5**	**Barème**
j) **Calculer** la probabilité que le nombre de visiteurs de la Route du Rhin provenant d'un échantillon aléatoire de 2000 visiteurs du site web soit inférieur ou égal à 156, en supposant que H_0 soit vraie. **Décider** si H_0 peut être rejetée. **Justifier** la conclusion.		3 points
X désigne le nombre de visiteurs de la Route du Rhin parmi les 2000 visiteurs du site web. X suit une distribution binomiale de paramètres $n = 2000$ et $p = 0{,}086$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $P(X \leq 156) \approx 0{,}107$ ou 10,7 %, ce qui est bien supérieur au seuil de signification de 5 %. Par conséquent, la proportion de l'échantillon n'a pas diminué de manière significative par rapport à ce que nous avons supposé dans l'hypothèse nulle. Il y a une diminution, mais elle n'est pas significative. Conclusion : H_0 ne peut pas être rejetée.		
Choix de la distribution binomiale avec les paramètres appropriés : 1 point Calcul de $P(X \leq 156)$: 1 point Conclusion : 1 point.		