

1 Cours

Donner la table de vérité de la conjonction.

2 Exercices

Dans tous ces exercices, lorsqu'une méthode est demandée, elle doit être respectée.

Exercice 1 : calcul logique

Dans cet exercice, A , B et C sont trois variables propositionnelles. Etablir les tables de vérité des propositions suivantes :

1. $(A \Rightarrow B) \vee (A \wedge B)$
2. $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

En utilisant les règles du calcul propositionnel, simplifier au maximum l'expression suivante :

$$\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B$$

Exercice 2

Une entreprise assure la production de deux types de calculatrices C_1 et C_2 en quantités (hebdomadaires) respectives x et y .

Le coût des éléments installés et le nombre d'heures de travail sont donnés pour chaque calculatrice dans le tableau suivant :

	C_1	C_2
Coût des éléments (en €)	6	8
Nombre d'heures de travail	1	1,5

Un programme de production hebdomadaire peut se représenter par la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cette production occasionne un coût c et un nombre t d'heures de travail. Ces deux éléments sont donnés dans la matrice $Y = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}$. Enfin on appelle A la matrice issue du tableau : $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Écrire une égalité matricielle reliant A , X et Y qui traduit la production de l'entreprise.
2. Durant une semaine, l'entreprise a produit 200 calculatrices C_1 et 800 calculatrices C_2 . Par un calcul matriciel, déterminer le coût total et le nombre d'heures de travail pour la production de cette semaine.

Partie B

On note B la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

1. Effectuer le produit $B \times A$.
2. Montrer en transformant l'égalité $Y = A \times X$ que $B \times Y = X$.
3. Durant une autre semaine, l'entreprise fait face à un coût total de 8 400 € et 1 450 heures de travail.
Déterminer par le calcul matriciel le nombre de calculatrices de chaque type fabriquées au cours de cette semaine.

Exercice 3 : énigme

Lors de ses aventures au pays des merveilles rapportées par Lewis Carroll, Alice est souvent accompagnée par le chat de Cheshire. Ce félin énigmatique s'exprime sous la forme d'affirmations logiques qui sont toujours vraies.

Alice se trouve dans un corridor dont toutes les portes à sa taille sont fermées. La seule porte ouverte est nettement trop petite pour qu'elle puisse l'emprunter. Une étagère est fixée au-dessus de cette porte. Le chat dit alors à Alice : « L'un des flacons posés sur cette étagère contient un liquide qui te permettra de prendre une taille plus adéquate. Mais attention, les autres flacons peuvent contenir un poison fatal. »

Trois flacons sont effectivement posés sur l'étagère. Le premier est rouge, le second jaune, le troisième bleu. Une étiquette est collée sur chaque flacon. Alice lit l'inscription figurant sur chaque étiquette :

- Flacon rouge : le flacon jaune contient un poison. Le flacon bleu ne contient pas de poison ;
- Flacon jaune : si le flacon rouge contient un poison, alors le flacon bleu aussi ;
- Flacon bleu : je ne contiens pas de poison, mais au moins l'un des deux autres flacons contient un poison.

Nous noterons R , J et B les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que les flacons rouge, jaune et bleu contiennent un poison.

Nous noterons I_R , I_J et I_B les propositions correspondant respectivement aux inscriptions sur les flacons rouge, jaune et bleu.

1. Exprimer I_R , I_J et I_B sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de R , J et B , puis donner la table de vérité de chacune de ces trois propositions.
2. On pose S : « Aucune des trois fioles ne contient de poison. »
 - (a) Exprimer S sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant de R , J et B .
 - (b) S est-elle compatible avec l'affirmation du chat de Cheshire? (c'est-à-dire, est-il possible que toutes les deux soient vraies?)
 - (c) On suppose dans cette question et uniquement cette question que S est vraie. Dans ce cas, est-ce qu'une ou plusieurs des inscriptions sont vraie(e)? Si oui, laquelle ou lesquelles?
3. On suppose dans cette question et uniquement cette question que les trois inscriptions sont vraies. Dans ce cas, est-ce qu'une ou plusieurs des fioles contient un poison? Si oui, laquelle ou lesquelles?

Exercice 4 : respecter la règle

Un professeur a distribué à chacun de ses élèves deux cartes. Chaque carte est d'une seule couleur : rouge ou noire ; et chaque carte comporte un numéro. Il leur a demandé d'en mettre une face visible, et la seconde face cachée. Pour tester leur aptitude en logique, il leur a demandé à chacun de respecter en plus une règle. Dans chacun des cas suivants :

- dire s'il est nécessaire ou pas de retourner la seconde carte pour savoir si l'élève a respecté la règle, puis :
 - s'il est nécessaire de retourner la seconde carte, donner un exemple de carte cachée qui respecte la règle et un exemple de carte cachée qui ne respecte pas la règle
 - s'il n'est pas nécessaire de retourner la seconde carte, dire si l'élève a respecté la règle ou pas
1. L'élève numéro 1 devait respecter la règle « Si la carte visible est rouge, alors la carte cachée est noire. » Il a laissé face visible un 3 noir.
 2. L'élève numéro 2 devait respecter la règle « Si la carte visible a un numéro pair, alors la carte cachée aussi. » Il a laissé visible un 14 rouge.
 3. L'élève numéro 3 devait respecter la règle « Si la carte cachée est noire, alors la carte visible a un numéro pair. » Il a laissé visible un 9 rouge.