

Cours

La conjonction :

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exercice 1 : calcul logique

1.

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge B$	$(A \Rightarrow B) \vee (A \wedge B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

2.

A	B	C	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F

3.

$$\begin{aligned} & \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B \\ \equiv & (\neg A \vee \neg \neg B) \vee \neg B && \left. \begin{array}{l} \text{Loi de De Morgan} \\ \text{On simplifie la double négation} \end{array} \right\} \\ \equiv & (\neg A \vee B) \vee \neg B \\ \equiv & \neg A \vee B \vee \neg B && \left. \begin{array}{l} \text{Le ou peut se calculer dans l'ordre que l'on veut} \\ \text{Tiers exclu : on a forcément soit } B \text{ soit } \neg B \end{array} \right\} \\ \equiv & \neg A \vee (B \vee \neg B) \\ \equiv & \neg A \vee \text{Vrai} \\ \equiv & \text{Vrai} && \left. \begin{array}{l} \text{Vrai est absorbant pour la disjonction} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Exercice 2 - BTS Informatique et Gestion, Polynésie 2006

Partie A

1. Fabriquer x calculatrices C_1 demande $6x \text{ €}$ et x heures de travail. Fabriquer y calculatrices C_2 demande $8y \text{ €}$ et $1,5y$ heures de travail. Ainsi $c = 6x + 8y$ et $t = x + 1,5y$. On vient donc d'écrire que $A \times X = Y$.

2. Dans ce cas, on connaît $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 800 \end{pmatrix}$. On calcule alors :

$$AX = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\ 600 \\ 1\ 400 \end{pmatrix}$$

Pour la production de cette semaine, il a fallu $1\ 400$ heures de travail et cela a coûté $7\ 600 \text{ €}$.

Partie B

1.

$$BA = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On vient de voir que $BA = I_2$, qui est la matrice neutre pour la multiplication, donc :

$$\begin{array}{l} Y = AX \\ BY = BAX \\ BY = I_2X \\ BY = X \end{array} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{On multiplie à gauche par } B \\ BA = I_2 \text{ d'après B.1.} \\ I_2 \text{ est neutre pour la multiplication} \end{array}$$

3. Dans ce cas, on connaît $Y = \begin{pmatrix} 8 & 400 \\ 1 & 450 \end{pmatrix}$. On calcule alors $BY = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 400 \\ 1 & 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 000 \\ & 300 \end{pmatrix}$

Cette semaine, l'entreprise a produit 1 000 calculatrices C_1 et 300 calculatrices C_2 .

Exercice 3 : énigme

1. La proposition du flacon rouge est la conjonction de deux choses : $I_R = J \wedge \neg B$

La proposition du flacon jaune est une implication : $I_J = R \Rightarrow B$

Dans la proposition du flacon rouge, le « mais » est une conjonction, et le « au moins un des deux » est une disjonction : $I_B = \neg B \wedge (R \vee J)$

R	J	B	$\neg B$	$R \vee J$	I_R	I_J	I_B
V	V	V	F	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	V	F

2. (a) $S = \neg R \wedge \neg J \wedge \neg B$

(b) S est compatible avec l'affirmation du chat de Cheshire puisque le chat dit juste que les fioles ne contenant pas le liquide magique peuvent contenir un poison, donc elles peuvent toutes ne pas contenir de poison.

(c) Si S est vraie, cela correspond à la ligne 8 de notre table de vérité (entouré dans la table). On voit que dans ce cas, seule I_J est vraie.

3. Les trois inscriptions sont vraies dans un seul cas (entouré dans la table la ligne 6). Dans ce cas, on a donc un poison uniquement dans la fiole jaune.

Exercice 4 : respecter la règle

- Il n'est pas nécessaire de retourner la seconde carte : l'élève a respecté la règle. En mettant visible une carte noire, la règle n'impose rien donc elle est respectée.
- Il est nécessaire de retourner la seconde carte. Effectivement si l'élève a caché une carte paire (un 4 rouge par ex.) il a respecté la règle, mais s'il a caché une carte impaire (un 3 rouge par ex.) il n'a pas respecté la règle.
- Il est nécessaire de retourner la seconde carte. Effectivement si l'élève a caché une carte noire (un 4 noir par ex.) il n'a pas respecté la règle (qui lui imposait alors d'avoir visible un pair, ce qui n'est pas le cas), mais si l'élève a caché une carte rouge (un 4 rouge par ex.) il a respecté la règle (qui ne lui imposait rien).