

1 Cours

Soit u une suite géométrique de terme initial $u_0 = -1$. Quelles sont les limites possibles de la suite u (on détaillera les cas en fonction de la raison q) ?

2 Exercice - Adapté de Nouvelle-Calédonie, 3 novembre 2013

Des étudiants en informatique étudient la propagation de virus sur le disque d'un ordinateur non connecté à un réseau.

Partie A : un premier virus

À chaque allumage de l'ordinateur, le virus se répand et le nombre de fichiers infectés est déterminé par le terme général de la suite (U_n) définie par son premier terme $U_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = 1 + 2U_n$ où n est le nombre d'allumages de l'ordinateur.

1. Calculer U_2, U_3 et U_4 .
Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $V_n = U_n + 1$.
Calculer V_1, V_2, V_3 et V_4 .
Quelle conjecture sur la nature de la suite (V_n) peut-on formuler ?
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $V_{n+1} = 2V_n$.
(b) En déduire une expression de V_n en fonction de n .
4. (a) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $U_n = 2^n - 1$.
(b) Combien vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$?
(c) À partir de combien d'allumages de l'ordinateur, le nombre de fichiers infectés sera-t-il supérieur à 1 000 ?

Partie B : un deuxième virus

L'équipe d'étudiants implante maintenant un virus sur un autre ordinateur. Le nombre de fichiers infectés en fonction du nombre n d'allumages de l'ordinateur est $3^n - 1$.

Par ailleurs, chaque fois que le nombre de fichiers infectés est un multiple de 11, un message d'avertissement s'affiche à l'écran.

Le reste de la division euclidienne de $3^n - 1$ par 11 est noté W_n .

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

| n | $3^n - 1$ | W_n |
|-----|-----------|-------|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = W_{5n}$.

2. Déduire X_1 de la question précédente, puis calculer X_2 et X_3 en expliquant bien les étapes.
3. Que peut-on conjecturer sur la suite X ? Quelle information peut-on en déduire sur l'apparition du message d'avertissement ?