Des couples parfaits

1 Partie 1

1. L'ensemble des carrés parfaits à deux chiffres est $C_2 = \{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$.

   On peut commencer par remarquer que l'on doit travailler modulo 10. Effectivement "ajouter 1 à chaque chiffre" est toujours simple, sauf lorsqu'il s'agit d'ajouter 1 à 9 (on aboutit alors à 10 qui n'est pas un chiffre). Il faut donc comprendre que lorsqu'on ajoute 1 à 9, cela donne 0. Il faut donc traiter 49 différemment : si on ajoute 1 à chaque chiffre de 49 on aboutit à 50 qui n'est pas un carré parfait.

   Pour les nombres qui ne comportent pas de 9, il suffit d'ajouter 11 :

   $16+11 = 27 \notin C_2$; $25+11 = 36 \in C_2$; $36+11 = 47 \notin C_2$; $64+11 = 75 \notin C_2$; $81+11 = 92 \notin C_2$.

   Ainsi le seul couple parfait d'entiers à deux chiffres est celui de l'énoncé : $\boxed{(25; 36)}$.

2. Remarque : les algorithmes pourraient aboutir à une erreur. Effectivement si a^2 comporte un 9, et $a^2 + 11$ est aussi un carré parfait, alors le couple $(a^2; a^2 + 11)$ n'est pas un couple parfait ! Effectivement si le chiffre des unités est un 9, notons d le chiffre des dizaines. En augmentant de 11, le chiffre des unités devient 0 (qui est bien 9 augmenté de 1, on travaille modulo 10 évidemment !) mais le chiffre des dizaines devient $d+2$ (report de la retenue), et pas $d+1$ comme le veut l'énoncé. Par ex. $49+11 = 60$. Ainsi, s'il se trouve que ces algorithmes fonctionnent, c'est que par chance les carrés parfaits qui ont un 9 dans leurs chiffres ne sont jamais les premiers d'un couple parfait.

   (a) Pour l'algorithme de Bernard, lorsque l'on fait un affichage, $(i; i+11)$ est un couple parfait.
   $\boxed{i \text{ représente le premier entier de ce couple parfait.}}$
   Pour l'algorithme de Cécile, lorsque l'on fait un affichage, $(i^2; i^2+11)$ est un couple parfait.
   $\boxed{i \text{ représente la racine du premier entier de ce couple parfait.}}$

   (b) L'algorithme de Cécile a un temps de $\boxed{6}$. Effectivement on rentre 6 fois dans la boucle : de 4 à 9 (compris) il y a 6 entiers (9 - 4 + 1).

2 Partie 2

1. L'algorithme de Bernard explore tous les nombres à 4 chiffres qui, augmenté de 1 111, ont également 4 chiffres (de 1 000 jusqu'à 8 888, car $8\ 888 + 1\ 111 \geq 9\ 999$ mais $8\ 889 + 1\ 111 = 10\ 000 > 9\ 999$), pour savoir si ce nombre est un carré parfait, et si en rajoutant 1 à chaque chiffre (donc en ajoutant 1 111 au nombre, même si comme on l'a vu ce n'est pas tout à fait juste lorsque le nombre contient un 9) c'est aussi un carré parfait. On obtient :

   Algorithme de Bernard modifié.

   Variable :
   i est un nombre entier.

   Corps de l'algorithme :
   Pour i de 1 000 à 8 888, faire
   Si $\sqrt{i}$ est un entier et $\sqrt{i + 1\ 111}$ est un entier, alors
   Afficher i et $i + 1\ 111$
   Fin Si
   Fin Pour

   Cet algorithme a un temps de $\boxed{7\ 889}$.

   L'algorithme de Cécile explore tous les nombres dont le carré comporte 4 chiffres et donc le carré auquel on rajoute un 1 à chaque chiffre comporte 4 chiffres également, c'est à dire de

32 à 94 (car $31^2 = 961 < 1\ 000$ et $32^2 = 1\ 024 \geq 1\ 000$; $94^2 + 1\ 111 = 9\ 947 \leq 9\ 999$ et $95^2 + 1\ 111 = 10\ 136 > 9\ 999$). On obtient donc :

Algorithme de Cécile modifié.

Variable :
i est un nombre entier.

Corps de l'algorithme :

Pour i de 32 à 94, faire
    Si $\sqrt{i^2 + 1\ 111}$ est un entier, alors
        Afficher i^2 et $i^2 + 1\ 111$
    Fin Si
Fin Pour

Cet algorithme a un temps de $\boxed{63}$.

2. Il y a un seul couple parfait d'entiers à quatre chiffres : $\boxed{(2\ 025 ; 3\ 136)}$.

Arrondis

1. Comme déjà donné dans le tableau, $\sqrt{13} \approx 3,61$ donc l'arrondi à l'unité est 4. Il en est de même jusqu'à $\sqrt{20} \approx 4,47$ puisque $\sqrt{21} \approx 4,58$ donc son arrondi à l'unité est 5.

   Ainsi il y a 8 valeurs (de 13 à 20) qui correspondent, donc $\boxed{\{4\} = 8}$.

2. Pour trouver la valeur de $\{n\}$ en utilisant la définition, il faut calculer les arrondis des racines carrées de nombres à partir de 1. On compte le nombre d'arrondis égaux à n, et on arrête de calculer quand on trouve un arrondi plus grand que n.

   On va donc faire une boucle tant que (puisqu'on veut calculer tant que les arrondis sont plus petits ou égaux à n), dans cette boucle tant que on met le compteur à jour lorsqu'un arrondi est égal à n, et on incrémente à chaque fois la valeur de l'entier dont on calcule l'arrondi de la racine.

Algorithme de calcul de $\{n\}$.

Variable :
i, *compteur*, *racine* et n sont quatre nombres entiers.

Corps de l'algorithme :

Saisir n
$i \leftarrow 1$
compteur $\leftarrow 0$
racine $\leftarrow 1$
Tant que *racine* $\leq n$, faire
    racine $\leftarrow$ *round*(*sqrt*(i))
    Si *racine* $= n$, alors
        compteur $\leftarrow$ *compteur* $+ 1$
    Fin Si
    $i \leftarrow i + 1$
Fin Tant que
Afficher *compteur*

3. On peut conjecturer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \{n\} = 2n}$.