

Exercice 1 (tiré de Asie, 18 juin 2013)**5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité****Partie A**

1. (a) On a :

$$\begin{cases} x_{E'} = \frac{5}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 2 \\ y_{E'} = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{5}{4} \times 2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_{E'} = 4 \\ y_{E'} = 4 \end{cases} \text{ donc } \boxed{E'(4; 4)}$$

$$\begin{cases} x_{F'} = \frac{5}{4} \times (-1) + \frac{3}{4} \times 5 \\ y_{F'} = \frac{3}{4} \times (-1) + \frac{5}{4} \times 5 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_{F'} = \frac{5}{2} \\ y_{F'} = \frac{11}{2} \end{cases} \text{ donc } \boxed{F'(2, 5; 5, 5)}$$

$$\begin{cases} x_{G'} = \frac{5}{4} \times (-3) + \frac{3}{4} \times 3 \\ y_{G'} = \frac{3}{4} \times (-3) + \frac{5}{4} \times 3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_{G'} = -\frac{3}{2} \\ y_{G'} = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ donc } \boxed{G'(-1, 5; 1, 5)}$$

(b) $OE = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$OE' = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Donc $\boxed{OE' = 2OE}$.

$OG = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;

$OG' = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Donc $\boxed{OG' = \frac{1}{2}OG}$.

En lisant simplement le système qui définit la transformation, on a $\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}}$.**Partie B**

- L'affichage est tout à la fin, ainsi seule les coordonnées de la N-ième transformation seront affichées. Ainsi il suffit d'écrire l'affichage dans la boucle, juste avant le FIN POUR.
- Il semble que les coordonnées sont toutes les deux croissantes, tendent vers $+\infty$, et se rapprochent l'une de l'autre.

Partie C1. *Initialisation* : pour $n = 1$, on a bien $A^1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ et :

$\alpha_1 = 2^0 + \frac{1}{2^2}$ et $\beta_1 = 2^0 - \frac{1}{2^2}$.

Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que : $A^p = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}$ et

$$\alpha_p = 2^{p-1} + \frac{1}{2^{p+1}} \quad \text{et} \quad \beta_p = 2^{p-1} - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

La relation $A^{p+1} = A \times A^p$ entraîne que, en écrivant la multiplication matricielle :

$\alpha_{p+1} = \frac{5}{4}\alpha_p + \frac{3}{4}\beta_p$ et

$\beta_{p+1} = \frac{3}{4}\alpha_p + \frac{5}{4}\beta_p$, soit en utilisant la relation de récurrence :

$$\alpha_{p+1} = \frac{5}{4} \left(2^{p-1} + \frac{1}{2^{p+1}} \right) + \frac{3}{4} \left(2^{p-1} - \frac{1}{2^{p+1}} \right) = \frac{8}{4} 2^{p-1} + \frac{2}{4} \frac{1}{2^{p+1}} = 2^p + \frac{1}{2^{p+2}}.$$

De même :

$$\beta_{p+1} = \frac{3}{4} \left(2^{p-1} + \frac{1}{2^{p+1}} \right) + \frac{5}{4} \left(2^{p-1} - \frac{1}{2^{p+1}} \right) = \frac{8}{4} 2^{p-1} - \frac{2}{4} \frac{1}{2^{p+1}} = 2^p - \frac{1}{2^{p+2}}.$$

Donc les relations sont vraies au rang $p + 1$.On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. (a) L'égalité

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

se traduit par :

$$\begin{cases} x_n &= 2\alpha_n + 2\beta_n \\ y_n &= 2\beta_n + 2\alpha_n \end{cases}$$

Ainsi quel que soit n entier naturel, $x_n = y_n$. \square

- (b) $OE_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{2x_n^2} = x_n\sqrt{2}$ (car x_n positif) ;
 Avec $x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n = 2(\alpha_n + \beta_n)$ et $\alpha_n + \beta_n = 2^n$, on obtient
 $OE_n = 2 \times 2^n \sqrt{2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ (car $2 > 1$), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} OE_n = +\infty$.

Exercice 2 (tiré de Pondichéry, 18 avril 2012)

5 points

1. (a) $z_{C'} = \frac{1 - z_C}{\bar{z}_C - 1} = \frac{1 - (-2 + i)}{\overline{-2 + i} - 1} = \frac{1 + 2 - i}{-2 - i - 1} = \frac{3 - i}{-3 - i}$.

Pour placer C' par contre ce calcul n'est pas suffisant : il vaut mieux avoir une forme « classique », comme la forme algébrique par exemple. Pour cela, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur (afin de voir apparaître $(a + b)(a - b)$ et donc de s'affranchir des i au dénominateur) :

$$z_{C'} = \frac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} = \frac{-9 + 3i + 3i + 1}{9 + 1} = \frac{-8 + 6i}{10} = \left[-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right].$$

- (b) Pour montrer que le point C' appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 il suffit de montrer que $OC' = 1$.

$$OC' = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1. \square$$

- (c) Comme d'habitude il existe bien des méthodes pour démontrer cet alignement. Le plus simple est peut-être de calculer les coefficients directeurs des droites (AC) et (AC') et de vérifier qu'ils sont égaux. On peut aussi calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AC} et \vec{AC}' et vérifier qu'ils sont colinéaires (leur déterminant est nul), ou encore vérifier que $AC' + C'C = AC$.

2. On cherche ici à résoudre sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ (car il ne faut pas que le dénominateur s'annule) l'équation :

$$\begin{array}{l} \frac{1-z}{\bar{z}-1} = 1 \\ 1-z = \bar{z}-1 \\ 2 = \bar{z}+z \\ 2 = 2\mathcal{R}e(z) \\ 1 = \mathcal{R}e(z) \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \times (\bar{z} - 1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} + 1 + z \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Explications plus bas} \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \div 2 \end{array}$$

Pour simplifier $\bar{z} + z$, l'idée est de poser comme d'habitude $z = x + iy$ (avec $x = \mathcal{R}e(z)$ et $y = \mathcal{I}m(z)$). Ainsi $\bar{z} + z = (x - iy) + x + iy = 2x$.

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des nombres complexes de partie réelle 1, sauf le nombre 1 justement car on a résolu sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ainsi Δ est $\left[\text{la droite d'équation } x = 1 \text{ privée du point } A \right]$.

3. Soit $M \neq A$. Notons comme d'habitude $z_M = x_M + iy_M$. Pour montrer que M' appartient au cercle \mathcal{C} il suffit de montrer que $OM' = 1$.

$$OM' = |z'_M| = \left| \frac{1 - z_M}{\bar{z}_M - 1} \right| = \frac{|1 - z_M|}{|\bar{z}_M - 1|} = \frac{|1 - x_M - iy_M|}{|x_M - iy_M - 1|} = \frac{\sqrt{(1 - x_M)^2 + (-y_M)^2}}{\sqrt{(x_M - 1)^2 + (-y_M)^2}} = 1. \square$$

4. Soit $z \neq 1$. Calculons $\frac{z' - 1}{z - 1} = \frac{\frac{1-z}{\bar{z}-1} - 1}{z - 1} = \frac{\frac{1-z - (\bar{z}-1)}{\bar{z}-1}}{z - 1} = \frac{1-z-\bar{z}+1}{(z-1)(\bar{z}-1)}$.

Or $\bar{z} - 1 = \overline{z - 1}$ donc $(z - 1)(\bar{z} - 1) = |z - 1|^2$ qui est réel.

De plus on vient de voir que $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ donc $2 - z - \bar{z} = 2 - 2\text{Re}(z)$ qui est réel.

Le quotient de deux nombre réels est réel, ainsi pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z' - 1}{z - 1}$ est réel.

Puisque $z_A = 1$, on vient de démontrer que $\frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A} = \frac{\overline{z_{AM'}}}{\overline{z_{AM}}}$ est réel, ce qui veut dire que les vecteurs $\overline{AM'}$ et \overline{AM} sont colinéaires : donc les points A, M et M' sont alignés.

5. D'après 3), $D' \in \mathcal{C}$. D'après 4) les points A, D et D' sont alignés. Ainsi $D' \in \mathcal{C} \cap (AD)$. Or d'après 2), D' n'est pas le point A. Ainsi, c'est l'autre point d'intersection.

Exercice 3 (adapté de Antilles-Guyane, 19 juin 2012)

5 points

Partie A : étude de la fonction

1.
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{l'exponentielle l'emporte donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x-1} = 0 \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \text{ par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1}.$$

Ainsi on peut en déduire que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2.
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x-1} = +\infty \left. \begin{array}{l} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \text{ par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

3. On applique la formule de dérivation d'un produit comme d'habitude :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^{x-1} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{x-1} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel x : $f'(x) = (1 \times e^{x-1} + x \times (e^{x-1})) + 0 = (1+x)e^{x-1}$. \square

4. On peut maintenant dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} , ci-contre.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Sgn. $x+1$	-	0	+
Sgn. e^{x-1}	+		
Sgn. $f'(x)$	-	0	+
Var. f	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> 1 ↘ ↗ + </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; margin-top: 10px;"> 1 - e⁻² ↗ + </div>		

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. Une équation de T_a est $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. On obtient :

$$\boxed{y = (x - a)(1 + a)e^{a-1} + ae^{a-1} + 1}$$

2. Cette tangente passe par l'origine du repère si et seulement si en remplaçant x par 0 et y par 0, l'égalité est vérifiée, donc :

$$0 = (0 - a)(1 + a)e^{a-1} + ae^{a-1} + 1$$

$$0 = (-a - a^2)e^{a-1} + ae^{a-1} + 1$$

$$0 = (-a - a^2 + a)e^{a-1} + 1$$

$$0 = -a^2e^{a-1} + 1. \square$$

3. Résoudre sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'équation $1 - x^2 e^{x-1} = 0$, c'est trouver les antécédents de 0 par la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 e^{x-1}$.
Pour cela, étudions les variations de g :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v(x) = e^{x-1} & v'(x) = e^{x-1} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$: $g'(x) = 0 - (2x \times e^{x-1} + x^2 \times (e^{x-1})) = -(2x + x^2)e^{x-1} = -x(2 + x)e^{x-1}$.

Le tableau de variations est ci-contre. Le TVI nous dit bien que 0 admet un unique antécédent par g sur $]0 ; +\infty[$ car g y est strictement décroissante, continue, et $0 \in]1; +\infty[$.

Cet antécédent est 1 car $g(1) = 1 - 1^2 e^{1-1} = 1 - 1 = 0$.

x	0	$+\infty$
Sgn. $-x$		-
Sgn. $2 + x$		+
Sgn. e^{x-1}		+
Sgn. $g'(x)$		-
Var. g	1	$-\infty$

4. On trouve donc $y = (x - 1)(1 + 1)e^{1-1} + 1e^{1-1} + 1$ soit $y = 2(x - 1) + 2$ soit $y = 2x$.

Exercice 4 (adapté de Pondichéry, 18 avril 2012)

5 points

1. (a) Les fonctions f_n sont toutes positives sur $[0 ; 1]$ puisque l'exponentielle est toujours positive et que $x \mapsto 1 + x$ est positive sur $[0 ; 1]$ également. Ainsi I_n représente « l'aire sous la courbe » de la fonction f_n , entre $x = 0$ et $x = 1$.

Graphiquement, on voit clairement que $I_0 > I_1 > I_2 > I_3$. On peut donc conjecturer que la suite (I_n) est strictement décroissante.

- (b) Pour démontrer cette conjecture, il suffit de démontrer, comme on le voit graphiquement, que $\forall x \in [0 ; 1], \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) < f_n(x)$. En intégrant cette inégalité il viendra que $I_{n+1} < I_n$.

$$\text{Soit donc } x \in [0 ; 1] \text{ et } n \in \mathbb{N} : f_{n+1}(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x} = \frac{e^{-nx-x}}{1+x} = \frac{e^{-nx} \times e^{-x}}{1+x}.$$

Or $\forall x \in [0 ; 1], e^{-0} \geq e^{-x} \geq e^{-1}$ donc $1 \geq e^{-x}$.

On en déduit donc bien que $\frac{e^{-nx} \times e^{-x}}{1+x} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x} = f_n(x)$. □

2. (a) Pour tout $0 \leq x \leq 1, 1 \leq 1 + x \leq 2$ donc en particulier $1 + x \geq 1$ donc en multipliant chaque membre par $1 + x$ (possible car c'est une quantité plus grande que 1 donc positive), $(1+x)^2 \geq 1+x$. Cela conduit à la double inégalité $(1+x)^2 \geq 1+x \geq 1$.

En passant à l'inverse (toutes les quantités sont positives) : $0 \leq \frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$

D'où les inégalités demandées, en multipliant par e^{-nx} qui est positif.

- (b) En intégrant l'inégalité précédente sur $[0 ; 1]$, il vient que :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx \leq \int_0^1 e^{-nx} dx.$$

$$0 \leq J_n \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx.$$

Puisque nous avons des inégalités, il y a de fortes chances que nous puissions appliquer le théorème des gendarmes pour déterminer la limite. Calculons le membre de droite de l'inégalité :

$$\int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} - \left(-\frac{e^{-n \times 0}}{n} \right) = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}.$$

Cette expression converge vers 0, donc par application du théorème des gendarmes, I_n converge vers 0 également (puisque le membre de gauche 0 converge vers 0). Pour la même raison, J_n converge vers 0.

3. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout x sur $[0; 1]$, $h_n(x) = -\frac{1}{n}f_n(x) = -\frac{1}{n} \frac{e^{-nx}}{1+x}$.

$$\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \\ v(x) = 1+x \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = -ne^{-nx} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel $x \in [0; 1]$: $h'_n(x) = -\frac{1}{n} \frac{-ne^{-nx} \times (1+x) - e^{-nx} \times 1}{(1+x)^2}$.

Pour faire apparaître $f_n(x)$ et $g_n(x)$, décomposons cette expression :

$$\begin{aligned} h'_n(x) &= -\frac{1}{n} \left(\frac{-ne^{-nx} \times (1+x)}{(1+x)^2} - \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \right) = -\frac{1}{n} \left(\frac{-ne^{-nx}}{1+x} - \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{n} \frac{-ne^{-nx}}{1+x} + \frac{1}{n} \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} = \frac{e^{-nx}}{1+x} + \frac{1}{n} \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} = f_n(x) + \frac{1}{n}g_n(x). \square \end{aligned}$$

- (b) On peut maintenant intégrer cette égalité pour retrouver I_n et J_n :

$$\int_0^1 h'_n(x) dx = \int_0^1 \left(f_n(x) + \frac{1}{n}g_n(x) \right) dx$$

$$[h_n(x)]_0^1 = \int_0^1 f_n(x) dx + \int_0^1 \frac{1}{n}g_n(x) dx$$

$$h_n(1) - h_n(0) = I_n + \frac{1}{n} \int_0^1 g_n(x) dx$$

$$-\frac{1}{n} \frac{e^{-n}}{1+1} - \left(-\frac{1}{n} \frac{e^{-n \times 0}}{1+0} \right) = I_n + \frac{1}{n}J_n$$

$$-\frac{1}{n} \frac{e^{-n}}{2} + \frac{1}{n} = I_n + \frac{1}{n}J_n$$

$$-\frac{1}{n} \frac{e^{-n}}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}J_n = I_n$$

$$\frac{1}{n} \left(-\frac{e^{-n}}{2} + 1 - J_n \right) = I_n$$

- (c) On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$. Donc par addition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n = 1$. Ainsi $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1}$.

Algorithme de tirage, exercice 1.

Variables :

$tirage$ et x sont deux nombres réels.

Corps de l'algorithme :

```
1 Lire la valeur de la variable  $x$ 
2  $tirage$  prend la valeur  $random()$ 
3 Si  $tirage < 0,6$ , Alors
4     Afficher le message « C'est un cube bleu. »
5      $tirage$  prend la valeur  $random()$ 
6     Si  $tirage < 0,4$ , Alors
7         Afficher le message « C'est un cube marqué d'un cercle. »
8     Sinon Si  $tirage < 0,6$ , Alors
9         Afficher le message « C'est un cube marqué d'un losange. »
10    Sinon
11        Afficher le message « C'est un cube marqué d'une étoile. »
12    Fin_Bloc_Si
13 Sinon
14    Afficher le message « C'est un cube rouge. »
15     $tirage$  prend la valeur  $random()$ 
16    Si  $tirage < 0,2$ , Alors
17        Afficher le message « C'est un cube marqué d'un cercle. »
18    Sinon Si  $tirage < 0,2 + x \div 100$ , Alors
19        Afficher le message « C'est un cube marqué d'un losange. »
20    Sinon
21        Afficher le message « C'est un cube marqué d'une étoile. »
22    Fin_Bloc_Si
23 Fin_Bloc_Si
```

Schéma de l'exercice 2

