Devoir maison n°9 — Pour le mardi 21 janvier 2014

Exercice 1 - Tirage dans une urne

1. La fonction *random*() d'algobox permet d'obtenir un nombre pseudo-aléatoire dans $[0;1[$ (la probabilité qu'il tombe dans un sous-intervalle donné de $[0;1[$ est supposée égale à la longueur de ce sous-intervalle).

   L'algorithme suivant simule à l'aide de cette fonction des tirages sans remise de boules dans une urne. Expliquer le rôle des différentes variables, puis rentrer l'algorithme dans Algobox.

   Algorithme de tirage.

```
Variables :
tirage est un nombre réel.
i, k, n, rouges, noires, nbr, nbn et nbv sont huit nombres entiers naturels.

Corps de l'algorithme :
n prend la valeur 20, rouges prend la valeur 7 et noires prend la valeur 11
nbr, nbn et nbv prennent chacun la valeur 0
k prend la valeur n + 1
Tant que k > n                 Cette boucle a pour rôle de s'assurer
     Lire la valeur de k        que la valeur de k rentrée par
Fin_Bloc_Tant_Que              l'utilisateur est inférieure à n.
Pour i variant de 1 jusqu'à k
     tirage prend la valeur random()
     Si tirage < rouges ÷ n, Alors
          nbr prend la valeur nbr + 1
          rouges prend la valeur rouges − 1
     Sinon
          Si tirage < (noires + rouges) ÷ n, Alors
               nbn prend la valeur nbn + 1
               noires prend la valeur noires − 1
          Sinon
               nbv prend la valeur nbv + 1
          Fin_Bloc_Si
     Fin_Bloc_Si
     n prend la valeur n − 1
Fin_Bloc_Pour
Afficher le message "Dans le tirage il y a eu "
Afficher la variable nbr
Afficher le message " boules rouges, "
Afficher la variable nbn
Afficher le message " boules noires et "
Afficher la variable nbv
Afficher le message " boules vertes."
```

2. Modifier et simplifier cet algorithme pour qu'il simule de la même manière des tirages avec remise.
3. Que devrait-on obtenir en moyenne lors de l'affichage à la fin de l'algorithme dans le cas d'un tirage avec remise ? Faire varier k et répéter les simulations. Dans quel(s) cas la simulation est-elle proche des valeurs théoriques escomptées ?

Exercice 2 - Marches aléatoires sur les entiers relatifs

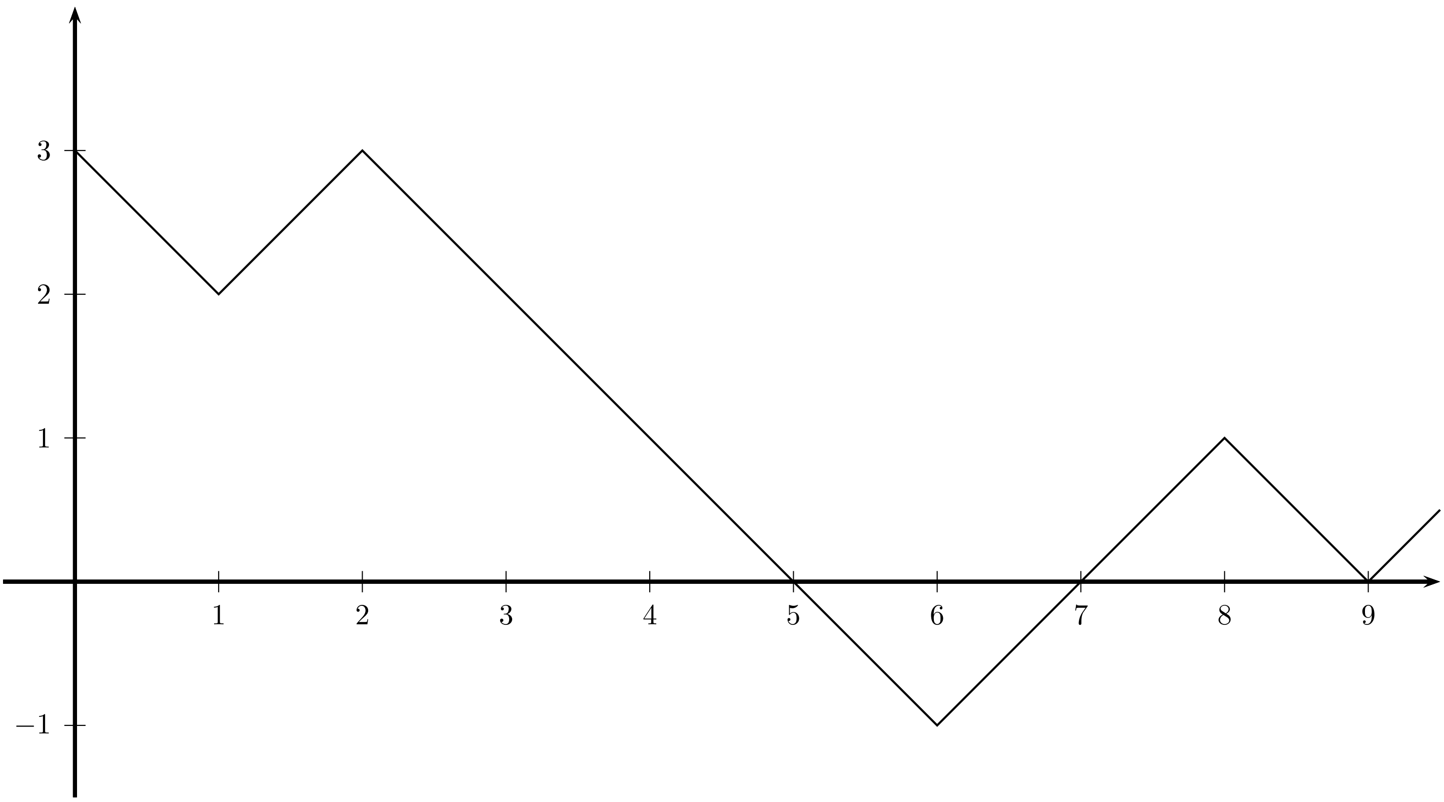
Un joueur dispose de S_0 euros. Il lance plusieurs fois de suite une pièce de monnaie que l'on suppose parfaitement équilibrée. S'il tombe sur face, il gagne un euro, s'il tombe sur pile il perd un euro. Le résultat du k^{e} lancer peut donc être modélisé par une variable aléatoire X_k qui suit une loi très simple :

x_i	-1	1
$p\left(X_k = x_i\right)$	0,5	0,5

On s'intéresse au gain du joueur sur $n \geq 1$ lancers, c'est-à-dire que l'on considère $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$.

La suite de variables aléatoires $(Sn)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. On autorise ici chacun des S_i à être négatif (le joueur peut avoir des dettes).

On peut représenter graphiquement une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ à l'aide d'une ligne brisée appelée trajectoire passant par les points (k, S_k) :



A l'étape k, on parle de montée si $X_k = 1$ et de descente si $X_k = -1$.

Partie A - Dénombrement

1. Calculer le nombre de trajectoires possibles à l'étape n partant d'un point $(0, S_0)$ donné.
2. On se donne deux points (n, a) et (m, b) avec $n < m$ et on considère les chemins passant par ces deux points, c'est-à-dire le nombre de lignes brisées passant par (n, a) et (m, b).
   (a) Montrer que si $|b - a| > m - n$, alors il n'existe pas de tel chemin.
   (b) Montrer que si $m - n$ et $b - a$ ont des parités différentes, alors il n'existe pas de tel chemin.
   (c) On suppose pour cette question que a et b sont strictement positifs. Montrer que le nombre de chemins joignant (n, a) à (m, b) et touchant l'axe des abscisses est exactement le nombre de chemins joignant (n, a) à $(m, -b)$. C'est ce que l'on appelle le principe de réflexion (dont le nom, aidé d'un dessin, doit vous aider à faire la démonstration !).

Partie B - Retour en 0

On se place ici dans le cas où $S_0 = 0$ (donc $P(S_0 = 0) = 1$) et on définit la variable aléatoire T (l'instant de retour en 0) comme le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $S_n = 0$. S'il n'existe pas, on pose $T = +\infty$.

1. Montrer que si T est fini, il est nécessairement pair.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(T = 2n + 1) = 0$.
2. Calculer $\mathrm{P}(T = 2)$, $\mathrm{P}(T = 4)$ et $\mathrm{P}(T = 6)$.
3. Vérifier alors que $\mathrm{P}(T = 2) = \mathrm{P}(S_0 = 0) - \mathrm{P}(S_2 = 0)$, que $\mathrm{P}(T = 4) = \mathrm{P}(S_2 = 0) - \mathrm{P}(S_4 = 0)$ et que $\mathrm{P}(T = 6) = \mathrm{P}(S_4 = 0) - \mathrm{P}(S_6 = 0)$.
   On admettra ensuite que pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{P}(T = 2n) = \mathrm{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathrm{P}(S_{2n} = 0)$.
   En déduire que pour tout entier naturel non nul N :
   $$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(T = 2n) = \mathrm{P}(T = 2) + \mathrm{P}(T = 4) + \cdots + \mathrm{P}(T = 2N) = \mathrm{P}(S_0 = 0) - \mathrm{P}(S_{2n} = 0).$$
4. On admet que $\underset{n \to +\infty}{lim} \mathrm{P}(S_{2n} = 0) = 0$. En déduire la probabilité que T soit fini (donc, ne soit pas égal à $+\infty$), que l'on notera $\mathrm{P}(T < +\infty)$.
5. On vient de démontrer que toute marche aléatoire partant de 0 revient en 0 avec une probabilité de 1. Pourquoi une marche aléatoire partant de 0 revient en 0 une infinité de fois avec une probabilité de 1 ?