Devoir surveillé n°1 Jeudi 26 septembre 2013

On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses. Le barème donné est indicatif.

Restitution organisée de connaissances **3 points**

1. Soient deux suites u et v telles que :
   - u est inférieure à v à partir d'un certain rang
   - u diverge vers $+\infty$

   Que peut-on dire de la limite éventuelle de la suite v ? Démontrer le résultat.
2. Donner l'expression $u(n)$ d'une suite u croissante non bornée. Donner l'expression $v(n)$ d'une suite bornée ni croissante ni décroissante.

Antibiotique **4 points**

Un laboratoire pharmaceutique souhaite tester le temps de réaction d'un nouvel antibiotique contre le bacille de Koch responsable des tuberculoses. Pour cela, on dispose d'une culture de 10^{10} bactéries dans laquelle on introduit l'antibiotique. On remarque que le nombre de bactéries est divisé par quatre toutes les heures.

On note u_0 le nombre de bactéries au moment de l'introduction de l'antibiotique. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite représentant le nombre de bactéries, contenues dans la culture, n heures après l'introduction de l'antibiotique.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer au bout de combien d'heures le nombre de bactéries deviendra inférieur à 100.

Résolution d'équation **3 points**

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations d'inconnue z suivantes :

1. $4z^2 - 4z + 1 = 0$
2. $2z^2 - 8z - 10 = 0$
3. $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

Problème **10 points**

Soit I l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.
2. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

Montrer que, pour tout n, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode :

3. (a) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

   (b) En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
   Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

   (c) Établir la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

   (d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

   (e) On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$. Calculer l.

Deuxième méthode :

On considère la suite (v_n) definie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

4. (a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

   (b) Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.

   (d) En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Bonus **2 points**

Soit $q > 1$. On se propose de redémontrer le fait que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Idée de la preuve : Minorer cette suite par une suite divergeant vers $+\infty$ et appliquer le théorème démontré en ROC page précédente.

A faire : Soient $a > 0$ et P_n la propriété « $(1+a)^n \geq 1 + na$ ». Démontrer que cette propriété est vraie sur $\mathbb{N}$ par récurrence sur n. Expliquer pourquoi si $q > 1$, alors $\exists a > 0$ tel que $q = 1 + a$. Conclure.