On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses.

1 Restitution organisée de connaissances

On considère l'ensemble E des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. On admettra que :

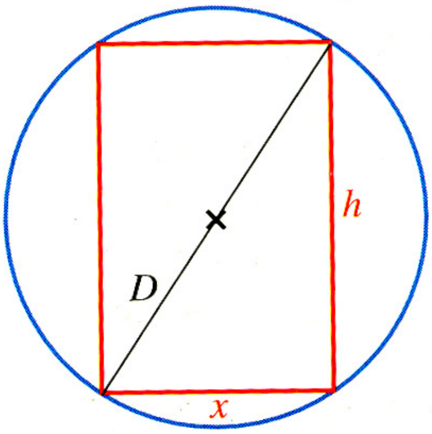
- E n'est pas vide
- Pour toute fonction f dans E, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que E ne contient qu'un seul élément.

2 Exercices

Exercice 1

On dispose d'un tronc d'arbre cylindrique que l'on veut équarrir en une poutre de forme parallélépipède rectangle. Si on regarde une section du tronc d'arbre (donc un cercle de diamètre D), cela va donner une coupe rectangulaire comme sur le schéma ci-dessous (les arêtes de la poutre sont sur le pourtour de l'arbre pour éviter de perdre du bois inutilement)



On veut que la poutre soit la plus résistante possible à la flexion, pour qu'elle puisse pleinement remplir son rôle. Si on note x la largeur de la poutre et h sa hauteur, on peut montrer en physique que plus xh^2 est grand, plus la résistance de la poutre est grande.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = -x^3 + 9x$.
   (a) Construire le tableau de variations de f.
   (b) Construire le graphique de la fonction f.
2. Comme sur le schéma précédent, D, x et h représentent des longueurs exprimées en mètres. On considère la coupe d'un tronc d'arbre de diamètre 3 mètres. Dans cette situation :
   (a) Expliquer pourquoi $x^2 + h^2 = 9$.
   (b) En déduire une expression de la quantité xh^2 en fonction uniquement de la variable x.
   (c) En utilisant la question 1, donner les valeurs de x et de h optimales pour que la poutre soit la plus résistante possible.

Exercice 2

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = (x^2 - 3x + 1)\mathrm{e}^x$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\phi'(x)$.
2. *Dans cette question, on admettra que* $\underset{x \to -\infty}{lim} x^2 e^x = 0$

   Étudier les limites de ϕ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   En déduire l'équation de l'asymptote horizontale à $\mathcal{C}_\phi$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de ϕ.
4. Tracer une courbe représentative de ϕ.