

Exercice 1 - Tiré d'Antilles-Guyane, 20 juin 2011

On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

- Démontrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.
- Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

- En déduire que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
- Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x ; y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

Exercice 2 - Tiré d'Antilles-Guyane, 19 juin 2012

Les deux questions sont indépendantes.

- Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$$

- On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

Algorithme exercice 2 question 2.

Variables :

A et N sont des entiers naturels.

Corps de l'algorithme :

```

1  Saisir A
2  N prend la valeur 1
3  Tant que  $N \leq \sqrt{A}$ , faire
4      Si  $\frac{A}{N} = \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ , alors
5          Afficher N et  $\frac{A}{N}$ 
6      Fin Si
7  N prend la valeur N + 1
8  Fin Tant que
    
```

- Quels résultats affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur saisit $A = 12$?
- Quels résultats affiche cet algorithme en fonction de la valeur saisie pour A (dans le cas général) ?