

Exercise 1

Calc. : ✗

Olkoon funktio f määritelty : $f(x) = a + b \frac{\ln(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Funktion f kuvaajalla on vaakasuora asymptootti $y = 1$ ja kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö on $y = -x + 2$.

Määritä $a : n$ ja $b : n$ arvo näiden tietojen perusteella.

5 marks

Exercise 2

Calc. : ✗

Kolmiulotteisessa avaruudessa sijaitsevat:

- Suora L_1 jonka yhtälö on:
$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
- Piste $A(2, 1, -4)$ joka kuuluu suoralle L_1
- Suora L_2 jonka yhtälö on:
$$\begin{cases} x = 10 - 3\mu \\ y = -21 + 12\mu \\ z = 11 - 6\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Näytä, että suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaisia. Sen jälkeen määritä se suoralla L_2 sijaitseva piste B , niin että $B : n$ ja $A : n$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa suoraa L_1 vasten.

5 marks

Exercise 3

Calc. : ✗

Ratkaise yhtälö $16^{x^2} = 2^{4x-1}$.

5 marks

Exercise 4

Calc. : ✗

Laske seuraava määrätty integraali:

$$\int_{-1}^1 \frac{3}{2} (e^{3x} + e^{-3x}) dx.$$

5 marks

Exercise 5

Calc. : ✗

Metalliketju roikkuu kahden seinän välissä.

Sen korkeus maasta nähden voidaan kuvata funktiolla:

$$h(x) = e^{-x} + e^{x-1} + 2,$$

missä x on etäisyys metreinä vasemmasta seinästä.

Laske, kuinka monen metrin päästä vasemmasta seinästä tämä ketju on lähimpänä maata.

5 marks

Exercise 6

Calc. : ✗

Näytä, että kompleksitasolla kompleksiyhtälön:

$$|z - 1 - 3i| = |z + 2 - 3i|$$

ratkaisut muodostavat suoran. Anna tämän suoran yhtälö.

5 marks

Exercise 7

Calc. : ✗

Eräs kone arpoo sattumanvaraisesti luonnollisen luvun x , joka sijaitsee välillä 1–999. Kaikki luvut välillä 10–99 kirjoitetaan kahtena numerona ja luvut välillä 1–9 yhtenä, eli ei esimerkiksi 062 vaan 62 tai 007 vaan 7.

- | | |
|--|---------|
| 1. Näytä, että arvottu luku on jaollinen viidellä todennäköisyydellä $\frac{199}{999}$. | 3 marks |
| 2. Millä todennäköisyydellä sama numero esiintyy arvotussa luvussa ainakin kaksi kertaa. | 3 marks |
| 3. Oletetaan, että saatu luku on jaollinen viidellä todennäköisyydellä 0,2.
Arvotaan peräkkäin viisi lukua.
Millä todennäköisyydellä tasan kolme näistä arvotuista luvuista on jaollisia viidellä? | 3 marks |
| 4. Mallinnetaan reaaliluvun x valintaa välillä $[1;999]$ todennäköisyystiheysfunktioilla $f(x) = \frac{1}{998}$. | |
| (a) Millä todennäköisyydellä saadaan luku, joka on jaollinen viidellä? | 1 mark |
| (b) Millä todennäköisyydellä saadaan reaaliluku, joka on yhtä suuri tai alle 500? | 3 marks |

Exercise 8

Calc. : ✗

Olkoon a positiivinen kokonaisluku.
Määritä, kuinka monta ratkaisua yhtälöllä

$$(E) : \ln(x) = ax^2.$$

on eri $a : n$ arvoilla.

7 marks