Exercise 1 Calc. : ✓

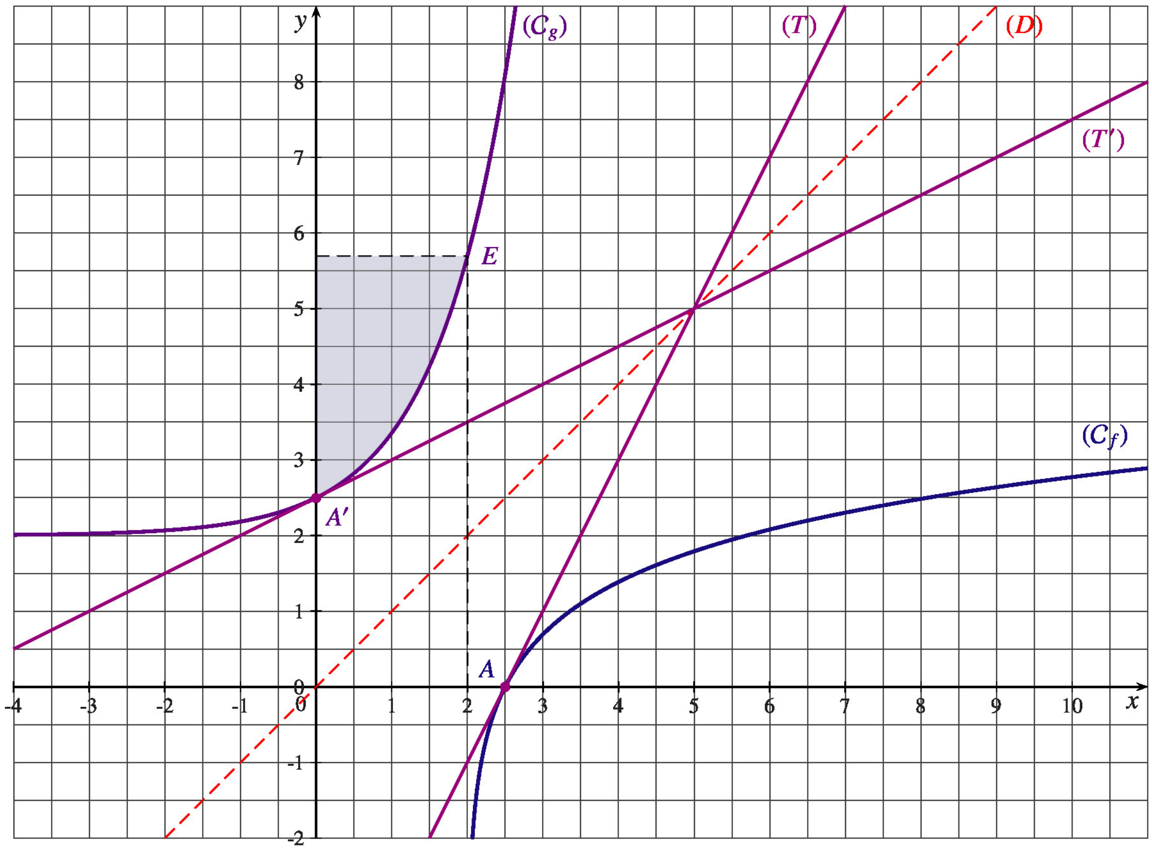
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(2x-4)$.
On appelle (C_f) la courbe tracée ci-dessous, représentative de f dans un repère orthonormal.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) ?

   (b) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]2;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

   (c) La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point A. Quelles sont les coordonnées exactes de A ?

   (d) Déterminer une équation de la droite (T) tangente en A à la courbe (C_f).



2. Sur la figure ci-dessus, on a tracé la courbe (C_f), le point A, la droite (T) et la droite (D) d'équation $y = x$.
   Par la symétrie axiale d'axe (D), la courbe (C_f) se transforme en une courbe (C_g) représentative d'une fonction g définie dans $\mathbb{R}$.
   On admet que, pour tout x réel, $g(x)$ s'écrit sous la forme $g(x) = a + be^x$ où a et b sont deux nombres réels.
   La courbe (C_g) ainsi construite passe par le point A' image de A par la symétrie d'axe (D).
   De plus, la courbe (C_g) admet au point A' une tangente (T') qui est l'image de la droite (T) par la symétrie d'axe (D).

   (a) Donner, sans justification, le coefficient directeur de la droite (T').

   (b) Calculer a et b en justifiant soigneusement les calculs.

   (c) Calculer l'ordonnée exacte du point E appartenant à (C_g) et ayant pour abscisse 2.

   (d) Quelles sont les coordonnées du point E' image de E par la symétrie d'axe (D) ?

3. (a) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 \left(2 + \frac{1}{2}e^x\right) dx$.

   (b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine hachuré défini par la courbe (C_g), l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E. On demande la valeur exacte du résultat.

   (c) Expliquer comment on peut en déduire, sans faire de calculs, la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{5}{2}}^{2+\frac{1}{2}e^2} f(x)\, dx$.