

**Exercise 1**

Calc. : ✓

Gabriella leikkii kauko-ohjattavalla autollaan. Auton paikkaa kuvaa vektori:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Missä  $t$  on aika minuutteina ja paikka on ilmaistu metreissä.

- |   |        |
|---|--------|
| 1. Mikä on auton paikka alkuhetkellä?                                       | 1 mark |
| 2. Mikä on auton paikka hetkellä 15 s?                                      | 1 mark |
| 3. Laske auton nopeus (suoran suuntavektori on sama kuin nopeuden vektori). | 1 mark |

Isoäiti katsoo Gabriellaa pisteestä  $P(-1, -6)$

- |  |         |
|--|---------|
| 4. Määritä lyhin etäisyys pisteestä $P$ siihen suoraan, jota pitkin auto kulkee. | 3 marks |
|--|---------|

Rotkon reuna on pisteessä  $\left(0, \frac{23}{3}\right)$  ja isoäiti kävelee kohti rotkon reunaa niin, että hänen nopeusvektorinsa on  $\begin{pmatrix} 3 \\ 41 \end{pmatrix}$ .

- |   |         |
|---|---------|
| 5. Kuinka monen minuutin päästä alkuhetkestä auto saavuttaa rotkon reunan?  | 2 marks |
| 6. Ehtiikö isoäiti kävellä rotkon reunalle ennen kuin auto saapuu sinne, jos isoäiti lähtee liikkeelle samaan aikaan kuin auto? | 4 marks |

**Exercise 2**

Calc. : ✓

1. Rakennusurakoitsija tekee urakkaa julkisen sektorin toimijalle. Jos urakoitsija ei saa urakkaa valmiiksi ajallaan, heidän pitää maksaa sakkoa tilaajalle: ensimmäisestä päivästä 100e, seuraavasta päivästä 110e jne. niin, että joka päivä maksettava sakko nousee 10e.

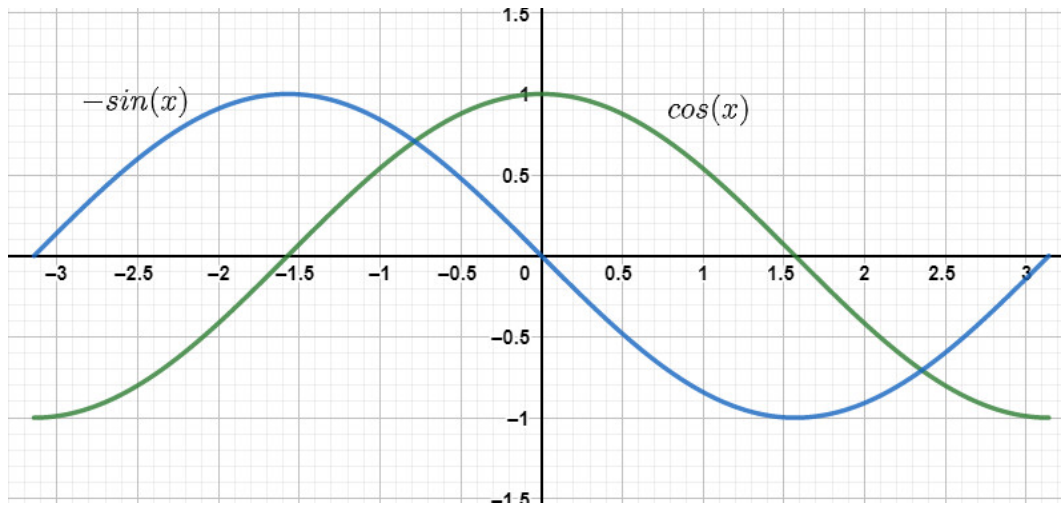
Olkoon  $u_n$  sakko  $n$  päivän jälkeen. Tällöin ensimmäinen termi lukujonossa  $u$  on  $u_1 = 100$ .

- |   |           |
|---|-----------|
| (a) Millainen lukujono $u_n$ on?  | 1 mark    |
| (b) Selitä, miksi $u_n = 90 + 10n$ kaikille $n$ arvoille.                               | 1.5 marks |
| (c) Minä päivänä päivän sakko olisi 220e?   | 1 mark    |
| (d) Kuinka paljon sakkoa rakennusurakoitsija olisi maksanut yhteensä 20 päivän jälkeen? | 2.5 marks |
2. Toisella rakennustyömaalla sakko on 80e ensimmäisen päivän jälkeen ja nousee 10% joka päivä. Olkoon  $v_n$  lukujono, joka kuvaa sakon määrää  $n$ . päivänä.
- |  |           |
|--|-----------|
| (a) Määritä arvot $v_1$ , $v_2$ ja $v_3$ .   | 1.5 marks |
| (b) Selitä, miksi $v_n = 80 \cdot 1.10^{n-1}$ kaikille $n$ arvoille.                         | 1.5 marks |
| (c) Kuinka paljon sakkoa tämä rakennusurakoitsija olisi maksanut yhteensä 20 päivän jälkeen? | 2 marks   |
3. Minä päivänä toisen rakennusurakoitsijan maksama päiväsakko ylittää ensimmäisen urakoitsijan päiväsakon?
- |  |         |
|--|---------|
|  | 3 marks |
|--|---------|

Exercise 3

Calc. : ✓

1. Tutkitaan kahta funktiota, joiden lausekkeet ovat  $x \mapsto \cos x$  ja  $x \mapsto -\sin x$  välillä  $[-\pi; \pi]$ . Niiden kuvaajat on esitetty alla olevassa kuvassa:



Osoita, että yhtälön  $\cos x + \sin x = 0$  ainoat ratkaisut välillä  $[-\pi; \pi]$  ovat  $\frac{-\pi}{4}$  ja  $\frac{3\pi}{4}$ .

3 marks

2. Olkoon välillä  $[-\pi; \pi]$  määritelty funktio  $f(x) = e^x \cdot \sin x$

- (a) Määritä funktion  $f$  derivaatan merkki eri kohdissa ja funktion  $f$  ääriarvokohdat ja ääriarvot sekä ääriarvojen luonne. 2 marks
- (b) Määritä funktion kuvaajalle kohtaan  $x = \frac{\pi}{2}$  piirretyn tangentin yhtälö. 2 marks
- (c) Millä välillä funktion  $f$  kuvaaja sijaitsee kokonaan sille piirrettyjen tangenttien yläpuolella? Perustelee. 2 marks
- (d) Määritä seuraava integraali (ohje: käytä osittaisintegrointia kahteen kertaan): 2 marks

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

**Exercise 4**

Calc. : ✓

Eräs yritys tutkii työntekijöidensä palkan (salary) suhdetta heidän työkokemukseen (experience). Yhteensä 12 työntekijän tiedot taulukoitiin:

Experience $x$ (years)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Salary $y$ (€)	4 200	4 800	4 600	5 000	5 200	5 600	5 650	5 660	5 500	6 000	5 831	6 200

1. Yksi alla olevista korrelaatiokertoimista vastaa jakaumaa, mikä? Selitä, miksi, ilman että teet mitään laskelmia laskimella. 1 mark

$$r_1 = 0.95, \quad r_2 = -0.95 \quad \text{or} \quad r_3 = 1?$$

2. Määritä taulukon pisteiden keskiarvopisteen koordinaatit, ja pyöristä lähimpään kokonaislukuun. 2 marks

3. Pisteisiin sovitetun regressiosuoran yhtälö  $y = ax + b$  saadaan määritettyä pienimmän neliösumman menetelmällä, jossa: 2 marks

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{ja} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

Määritä arvot  $a$  : lle ja  $b$  : lle (kahden desimaalin tarkkuudella) alla olevien tietojen avulla:

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0	-11	121
2	-9	81
4	-7	49
6	-5	25
8	-3	9
10	-1	1
12	1	1
14	3	9
16	5	25
18	7	49
20	9	81
22	11	121

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 45\,009$$

4. Käytä lineaarista mallia  $f(x) = 78,7x + 4\,488$  a määritä sellaisen työntekijän palkka, jonka työkokemus on 40 vuotta. 2 marks

Yrityksen työntekijöiden palkat noudattavat normaalijakaumaa odotusarvonaan  $\mu = 5\,353$  ja keskihajontanaan  $\sigma = 553$ .

5. Eräs yrityksen työntekijä Mr. Smith saa palkkaa 6 459e. Kuinka monta prosenttia yrityksen työntekijöistä saa vähemmän palkkaa kuin Mr. Smith? 1.5 marks

6. Määritä, millä todennäköisyydellä työntekijän palkka on yli 7 636e. Vertaa vastausta kohdan 5 vastaukseen. 1.5 marks

Toisessa yrityksessä palkat noudattavat normaalijakaumaa keskihajontanaan  $s = 620$ .

7. Todennäköisyys, että työntekijän palkka on yli 5 000e on 0,107. Määritä yrityksen keskiarvopalkka. 3 marks