

Exercice 1

Calc. : ✓

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.

On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$(R) \text{ Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n).$$

On suppose que $P_0 = 40000$ et $P_1 = 60000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n -ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3 .
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

- (a) Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Exprimer U_n en fonction de n .
- (b) En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$. En déduire que, pour tout n , on a : $V_n = P_1 - \frac{1}{2}P_0$.
Calculer V_n .
- (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.
En déduire une expression de P_n en fonction de n .
- (d) Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.
Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?