Exercise 1 Calc. : ✓

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5x}$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et (D) la droite d'équation $y = x - 2$. La courbe (C) est partiellement représentée en annexe ci-dessous.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On pose $\alpha = 2\ln 5$.
   (a) Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.
   (b) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.
   (a) Calculer $f'(x)$,pour tout x élément de l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur cet intervalle.
4. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$ et que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f(x) - (x - 2) > 0$.

   Donner l'interprétation graphique de ces résultats.
5. Sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie) :
   (a) placer le point de la courbe (C) d'abscisse α ;
   (b) tracer la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse α ;
   (c) tracer la droite (D).
6. On note $\mathcal{A}$ l'aire (en unités d'aire) du domaine E délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 6$.
   (a) Hachurer sur le graphique, donné en annexe, le domaine E, puis exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.
   (b) Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$, puis en donner la valeur arrondie au centième.

ANNEXE