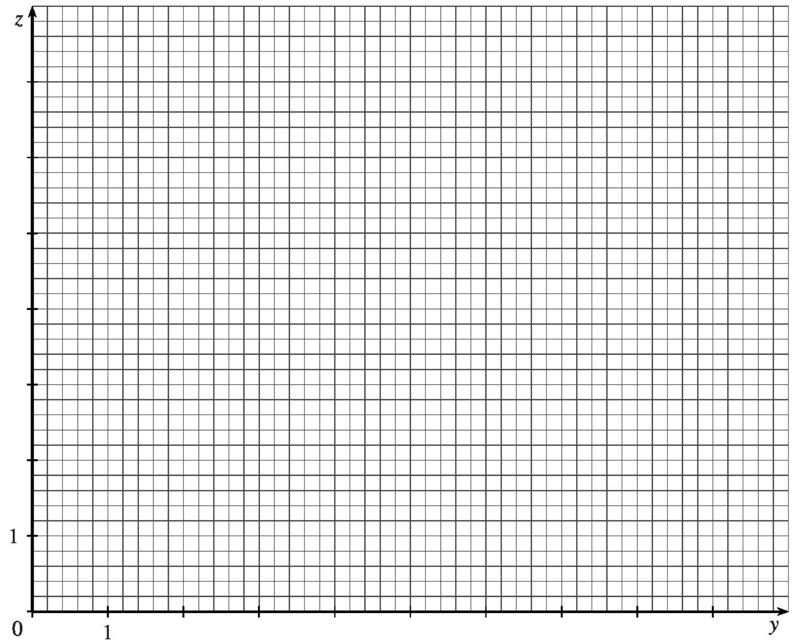
Exercise 1 Calc. : ✓

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que $z = 3xy$. On dit que $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = 3xy$.
Une courbe de niveau de cote z_0 est l'intersection d'un plan d'équation $z = z_0$, parallèle au plan (xOy) avec la surface $\mathcal{S}$. On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse x_0 et une courbe de niveau d'ordonnée y_0.

1. Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et d'abscisse 2.
   Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan (yOz) sur la figure 1.

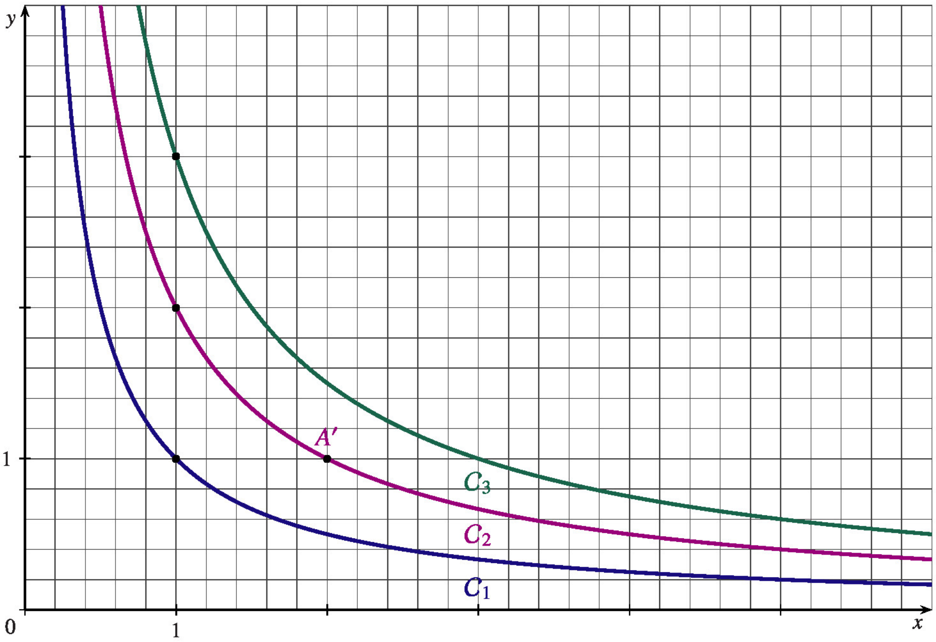
Figure 1



2. (a) Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?
   (b) Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.

3. Sur la figure 2 sont représentées trois courbes C_1, C_2 et C_3 représentant les projections orthogonales dans le plan (xOy) de trois courbes de niveau de cote constante k.
   Préciser, en le justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.

Figure 2



4. Le point A' représenté sur la courbe C_2 de la figure 2 est la projection orthogonale dans le plan (xOy) d'un point $A(x; y; z)$, de la surface $\mathcal{S}$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
   (b) Préciser les coordonnées du point A'', projeté orthogonal de A dans le plan (xOy), puis placer ce point A'' sur la figure 1.
5. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 6y - z - 6 = 0$.
   (a) Montrer que le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ contient la courbe de niveau d'abscisse 2.
   (c) Démontrer que l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.
   On pourra utiliser la factorisation $x + 2y - xy - 2 = (x - 2)(1 - y)$.