Exercise 1 Calc. : ✓

Les parties 1 et 2 sont indépendantes

Partie 1

Le transport routier de passagers à Londres était de 339 601 kilomètres parcourus en 2019, soit une croissance annuelle de 4,6% par rapport à 226 913 en 2010.
Le nombre de kilomètres parcourus est modélisé par la fonction f :

$$f(x) = k \cdot A^x$$

Où $f(x)$ est le nombre de kilomètres parcourus et x le nombre d'années à partir de l'année 2010. Ainsi, $f(0) = 226\ 913$ est le nombre de millions de kilomètres parcourus en 2010, $f(1)$ est le nombre de millions de kilomètres parcourus en 2011, etc.

1. **Montrer** que $A = 1,046$ et $k = 226\ 913$ en justifiant. — 3 marks
2. **Écrire** la fonction f sous la forme $f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x}$, en donnant la valeur approchée du paramètre a à trois chiffres après la virgule. **Détailler** votre calcul. — 3 marks
3. **Déterminer**, pour l'année 2019, la différence entre la prévision de la formule de $f(x)$ et la valeur réelle de 339 601 kilomètres. — 3 marks
4. **Calculer** en quelle année le nombre de kilomètres sera égal à 312 000. — 2 marks
5. **Expliquer** pourquoi ce modèle ne peut pas être utilisé sur un nombre très élevé d'années. — 2 marks
6. On suppose que le nombre de kilomètres parcourus s'écrit :

   $$N = 226\ 913 \times \mathrm{e}^{0,045x}$$

   où N est le nombre de kilomètres et x le nombre d'années à partir de 2010.

   Démontrer que le nombre d'années x à partir de 2010 exprimé en fonction du nombre de kilomètres, est donné par la formule suivante : — 2 marks

   $$x = \frac{\ln\left(\frac{N}{226\ 913}\right)}{0,045}$$

Partie 2

Dans la très grande métropole d'Istanbul le nombre de kilomètres en mai 2021 était de 2 500 000. Mais avec la meilleure gestion de la Covid-19, une augmentation du nombre de kilomètres est prévue. Ainsi, deux ingénieurs (ingénieur n°1 et ingénieur n°2) prédisent le nombre de kilomètres parcourus chaque mois à partir du mois de mai 2021.

Les ingénieurs prévoient ainsi les données pour les mois suivants :

Mois	**Prévisions de l'ingénieur n°1** Nombre de km parcourus	**Prévisions de l'ingénieur n°2** Nombre de km parcourus
Mai 2021	2 500 000	2 500 000
Juin 2021	2 550 000	2 537 500
Juillet 2021	2 600 000	2 575 563
Août 2021	2 650 000	2 614 196
Septembre 2021	2 700 000	2 653 409
Octobre 2021	2 750 000	2 693 210

1. **Chercher** quel ingénieur a fait un modèle linéaire et quel ingénieur a fait un modèle exponentiel. **Justifier** votre choix par des calculs. — 4 marks

2. On suppose que l'ingénieur n°2 a construit un modèle exponentiel :

   (a) **Déterminer** l'expression de la fonction exponentielle correspondante sous la forme : $h(t) = k \times A^t$ — 2 marks

   où t est le nombre de mois écoulés après mai 2021.

   (b) **Déterminer** le taux de croissance en pourcentage de ce modèle exponentiel. — 2 marks

3. Le modèle linéaire est donné par la formule : $g(t) = 2\ 500\ 000 + 50\ 000 \times t$

   et le modèle exponentiel par la formule : $h(t) = 2\ 500\ 000 \times 1,015^t$.

   Avec t le nombre de mois après mai 2021, soit $t = 0$ au mois de mai 2021.

   Calculer le mois au cours duquel on obtient le même nombre de kilomètres pour les deux modèles. — 2 marks

Exercise 2 Calc. : ✓

La municipalité d'une ville de montagne prévoit de construire un tunnel dont la section transversale est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

Avec x en abscisse donnant la largeur en mètres du tunnel et $f(x)$ en ordonnée donnant la hauteur en mètres du tunnel.

1. À l'aide de votre calculatrice, **déterminer** les abscisses des points d'intersection de la fonction f avec l'axe des abscisses (les zéros de f). — 2 marks

2. En **déduire,** par le calcul, la largeur du tunnel en mètres. — 2 marks

3. **Trouver** la hauteur maximale du tunnel en mètres à l'aide de votre calculatrice. — 2 marks

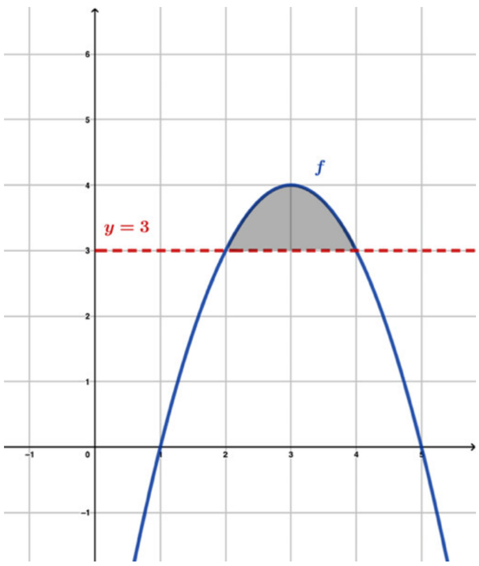
4. **Montrer** que la fonction F définie par $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ est une primitive de la fonction f. — 3 marks

5. **Calculer** l'aire du domaine, en mètres carrés, délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$. Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule. — 3 marks

6. **Calculer** la longueur de l'arc de la courbe de f en mètres, entre $x = 1$ et $x = 5$, arrondie à deux chiffres après la virgule, à l'aide de la formule suivante : — 3 marks

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Les ingénieurs placent un support en bois d'une hauteur de 3 mètres jusqu'au sommet de la galerie, modélisé dans le graphique ci-dessous, par la zone grisée.



7. **Calculer** l'aire du support en bois (zone grisée), en mètres carrés, arrondie à deux chiffres après la virgule, à l'aide de la formule suivante : — 3 marks

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

8. On considère la courbe de la fonction f qui tourne autour de l'axe des abscisses.

   Calculer le volume du solide de révolution ainsi engendré par la courbe de f, entre $x = 1$ et $x = 5$, à l'aide de la formule suivante : 4 marks

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

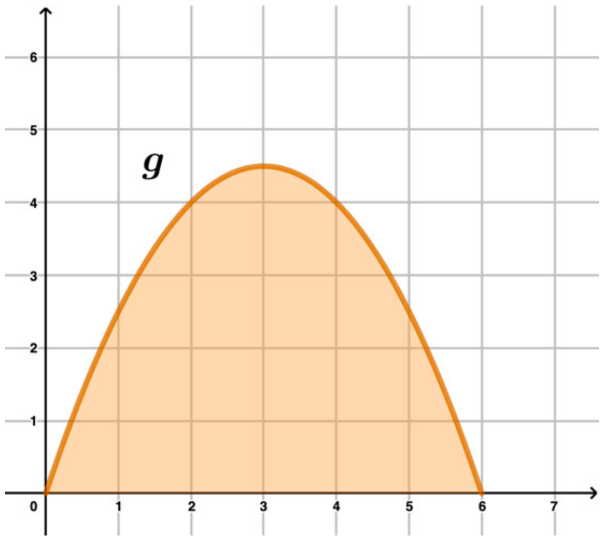
   Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule.

9. La cheffe de projet, décide d'agrandir le tunnel en creusant dans la roche.

   La section transversale du nouveau tunnel est modélisée par la fonction g définie par :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

   avec x et $g(x)$ en mètres, comme dans le graphique ci-dessous.



   Calculer l'aire du domaine coloré, en mètres carrés, délimitée par la courbe de g, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 6$. Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule. 3 marks