Exercise 1 Calc. : ✓

Un jour donné dans un centre de test Covid-19, 19 personnes présentant des symptômes ont été testées et 6 d'entre elles ont eu un résultat positif. Le même jour, 87 personnes sans symptôme ont été testées dont 85 ont eu un résultat négatif.

1. **Montrer** que la probabilité d'obtenir un résultat positif dépend du fait qu'une personne présente ou non des symptômes. — 2 marks

Pour protéger les données personnelles, les échantillons de tests sont étiquetés avec un code formé de deux lettres (choisie dans l'alphabet de 26 lettres) et quatre chiffres (de 0 à 9). Les mêmes lettres et chiffres peuvent être choisis plus d'une fois.

2. **Calculer** le nombre total de codes différents pouvant être créés avec ce système. — 2 marks

Après plusieurs mois, les statistiques ont montré que 1,7% des personnes sans symptôme sont testées positives. Une entreprise comptant 20 employés (tous sans symptôme) demande à tous ses employés de se faire tester.

3. **Donner** deux hypothèses, qui doivent être faites pour modéliser cette situation avec une distribution binomiale. — 2 marks
4. **Calculer** la probabilité qu'au moins un des employés soit testé positif. — 3 marks

Une autre entreprise située dans un autre pays envoie également tous ses employés passer un test Covid-19. On suppose que la situation peut être modélisée par une distribution binomiale donnée par la formule

$$B(84; 0,02; k) = \binom{84}{k} \cdot 0,02^k \cdot 0,98^{84-k}.$$

5. **Interpréter** les valeurs 84, $0,02$ et $0,98$ dans le contexte donné. — 3 marks

Le 5 mars 2020, un homme de retour d'Italie est la première personne au Grand-Duché de Luxembourg à avoir été testée positive au Covid-19. Ce jour est donc marqué comme le jour 0 dans la statistique. Le tableau suivant montre le nombre total de personnes infectées enregistrées au Luxembourg dans les jours qui ont suivi l'apparition du premier cas.

Jour	0	1	2	3	4	5	6
Nombre	1	3	4	5	5	7	7

6. **Tracer** un nuage de points de ces valeurs ainsi qu'un modèle de régression linéaire et un modèle de régression exponentiel. — 3 marks
7. **Donner** les équations qui décrivent les deux modèles de régression de la question 6. — 2 marks
8. **Expliquer** pourquoi il est difficile de décider, à ce stade précoce, si la propagation du virus est mieux modélisée par un modèle linéaire ou par un modèle exponentiel. — 2 marks

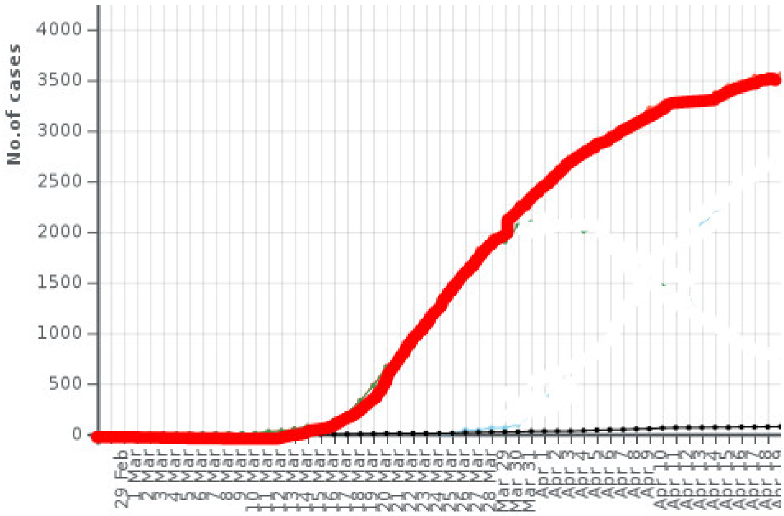
Après sept jours supplémentaires, d'autres modèles A et B ont été proposés pour faire de meilleures prédictions, où t est donné en jours :

$$A(t) = 1,35567 \cdot 1,46977^t \qquad\qquad B(t) = 12,4396 \cdot t - 34,8571$$

Au 16$^{\text{ème}}$ jour, 670 cas de Covid-19 ont été enregistrés au Grand-Duché de Luxembourg.

9. **Calculer** le nombre prévisionnel de personnes infectées le 16$^{\text{ème}}$ jour avec le modèle A, puis avec le modèle B et **comparer** ces nombres avec le nombre réellement observé. **Décider** du modèle le mieux adapté à cette situation et **justifier** la réponse. — 2 marks

Le diagramme suivant montre l'évolution du nombre total d'infections enregistrées pour les quatre premières semaines au Grand-Duché de Luxembourg.



10. **Donner** deux raisons possibles pour lesquelles la courbe s'aplatit à un stade ultérieur. — 2 marks

La courbe peut être modélisée par la fonction C définie par

$$C(t) = \frac{3404}{1 + 193 \cdot e^{-0,233 \cdot t}}$$

11. **Déterminer** le jour où le taux d'infection est le plus élevé. — 2 marks

Exercise 2 Calc. : ✓

In a Covid-19 testing station, 19 people with symptoms were tested on a specific day and 6 of them had a positive result. On the same day, 87 people without symptoms were tested of which 85 were tested negative.

1. **Show** that the probability of getting a positive result depends on whether a person has symptoms or not. — 2 marks

To protect personal data, the test probes are labelled with a code, that contains 2 letters (out of an alphabet with 26 letters) and 4 digits (0–9). The same letters and digits may be chosen more than once.

2. **Calculate** the total number of different codes, that can be created by this system. — 2 marks

After several months, statistics have shown, that 1.7% of the people without symptoms are tested positive. A company, with 20 employees (all without symptoms), instructs everyone to get tested.

3. **Give** two assumptions, that need to be made to model this situation with a binomial distribution. — 2 marks
4. **Calculate** the probability, that at least one of the employees is tested positive. — 3 marks

A different company in another country also sends all their employees for a Covid-19 test. Assuming that the situation can be modelled by a binomial distribution given by the formula

$$B(84; 0.02; k) = \binom{84}{k} \cdot 0.02^k \cdot 0.98^{84-k}.$$

5. **Interpret** the values 84, 0.02 and 0.98 in the given context. — 3 marks

On March 5 in 2020 a man who returned from Italy is the first person in Luxembourg who was tested positive with COVID-19. So, this day is marked as day 0 in the statistic. The following table shows the total number of registered infected people in Luxembourg in the days after the first case appeared.

Day	0	1	2	3	4	5	6
Number	1	3	4	5	5	7	7

6. **Draw** a scatter graph of these values together with a linear and an exponential regression model. — 3 marks
7. **Give** the equations that describe the two regression models in part 6. — 2 marks
8. **Explain**, why it is so difficult to decide, if the spread out of the virus is best modelled with a linear or an exponential model in this early stage. — 2 marks

After seven more days other models were made to make better predictions, where t is given in days:

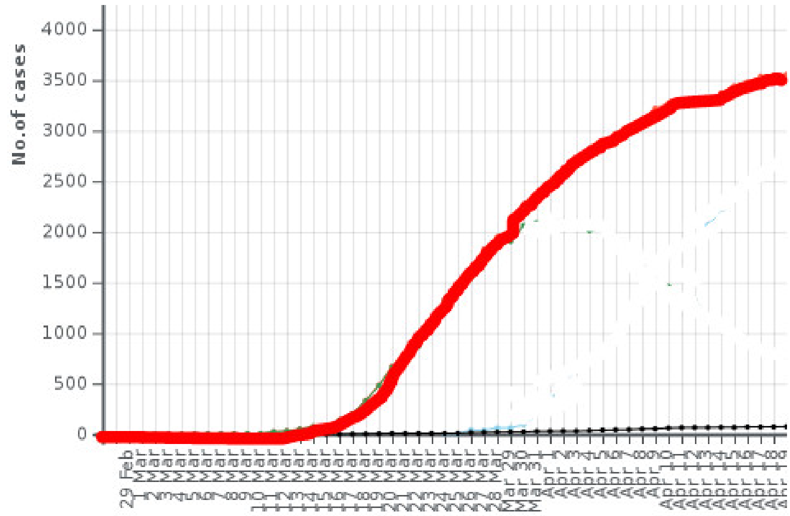
$$A(t) = 1.35567 \cdot 1.46977^{t} \qquad\qquad B(t) = 12.4396 \cdot t - 34.8571$$

On day 16, there were 670 registered cases of COVID-19 in Luxembourg.

9. **Calculate** the predicted number of infected people on day 16 with model A and model B and **compare** it with the true number. **Decide**, which model obviously works better for this situation and **reason** your answer.

2 marks

The following diagram shows the graph of the total number of registered infections for the first 4 weeks in Luxembourg.



10. **Give** two possible reasons, why the curve flattens in a later stage.

2 marks

The curve can be modelled by the function

$$C(t) = \frac{3404}{1 + 193 \cdot e^{-0.233 \cdot t}}$$

11. **Determine** the day with the highest infection rate by calculation.

2 marks

Exercise 3 Calc. : ✓

In einer Covid-19-Teststation wurden an einem bestimmten Tag 19 Personen mit Symptomen getestet und 6 von ihnen hatten ein positives Ergebnis. Am gleichen Tag wurden 87 Personen ohne Symptome getestet, von denen 85 negativ getestet wurden.

1. **Zeigen** Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, ein positives Ergebnis zu erhalten, davon abhängt, ob eine Person Symptome hat oder nicht. — 2 marks

Zum Schutz persönlicher Daten sind die Testergebnisse mit einem Code versehen, der 2 Buchstaben (aus einem Alphabet mit 26 Buchstaben) und 4 Ziffern (0–9) enthält. Die gleichen Buchstaben und Ziffern dürfen mehrfach gewählt werden.

2. **Berechnen** Sie die Gesamtzahl der verschiedenen Codes, die von diesem System erstellt werden können. — 2 marks

Nach mehreren Monaten hat die Statistik gezeigt, dass 1,7% der Personen ohne Symptome positiv getestet werden. Ein Unternehmen, mit 20 Mitarbeitern (alle ohne Symptome), weist alle an, sich testen zu lassen.

3. **Nennen** Sie zwei Annahmen, die getroffen werden müssen, um diese Situation mit einer Binomialverteilung zu modellieren. — 2 marks
4. **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der Mitarbeiter positiv getestet wird. — 3 marks

Ein anderes Unternehmen in einem anderen Land schickt ebenfalls alle seine Mitarbeiter zu einem Covid-19-Test. Es wird angenommen, dass die Situation durch eine Binomialverteilung modelliert werden kann mit der Formel

$$B(84; 0,02; k) = \binom{84}{k} \cdot 0,02^k \cdot 0,98^{84-k}.$$

5. **Interpretieren** Sie die Werte 84, 0,02 und 0,98 in dem gegebenen Kontext. — 3 marks

Am 5. März 2020 ist ein aus Italien zurückgekehrter Mann die erste Person im Großherzogtum Luxemburg, die positiv mit COVID-19 getestet wurde. Daher ist dieser Tag in der Statistik als Tag 0 markiert. Die folgende Tabelle zeigt die Gesamtzahl der registrierten infizierten Personen im Großherzogtum Luxemburg in den Tagen nach Auftreten des ersten Falles.

Tag	0	1	2	3	4	5	6
Nummer	1	3	4	5	5	7	7

6. **Zeichnen** Sie ein Streudiagramm dieser Werte zusammen mit einem linearen und einem exponentiellen Regressionsmodell. — 3 marks
7. **Geben** Sie die Gleichungen **an**, die die beiden Regressionsmodelle in Frage 6. beschreiben. — 2 marks
8. **Erklären** Sie, warum es so schwierig ist, zu entscheiden, ob die Ausbreitung des Virus in diesem frühen Stadium am besten mit einem linearen oder einem exponentiellen Modell modelliert wird. — 2 marks

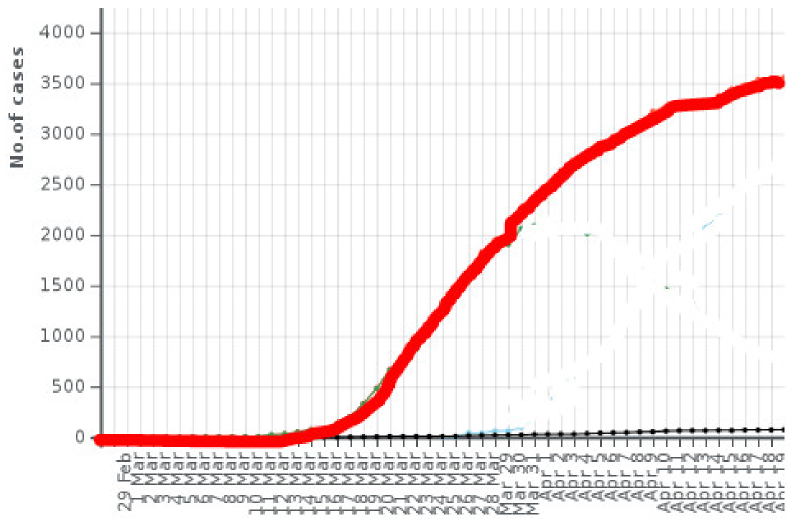
Nach weiteren sieben Tagen wurden andere Modelle erstellt, die bessere Vorhersagen machten, wobei t in Tagen angegeben ist:

$$A(t) = 1,35567 \cdot 1,46977^t \qquad B(t) = 12,4396 \cdot t - 34,8571$$

Am 16. Tag gab es im Großherzogtum Luxemburg 670 registrierte Fälle von COVID-19.

9. **Berechnen** Sie die vorhergesagte Anzahl der infizierten Personen an Tag 16 mit Modell A und Modell B und **vergleichen** Sie diese mit der tatsächlichen Anzahl. **Entscheiden** Sie, welches Modell für diese Situation offensichtlich besser geeignet ist und **begründen** Sie Ihre Antwort. — 2 marks

Das folgende Diagramm zeigt den Verlauf der Gesamtzahl der registrierten Infektionen für die ersten 4 Wochen im Großherzogtum Luxemburg.



10. **Nennen** Sie zwei mögliche Gründe, warum die Kurve im späteren Verlauf abflacht. — 2 marks

Die Kurve kann durch die Funktion C modelliert werden mit

$$C(t) = \frac{3404}{1 + 193 \cdot e^{-0,233 \cdot t}}$$

11. **Ermitteln** Sie den Tag mit der höchsten Infektionsrate durch Berechnung. — 2 marks

Exercise 4 Calc. : ✓

Covid-testausasemalla testattiin eräänä päivänä 19 oireista ihmistä, ja 6 heistä sai positiivisen testituloksen. Samana päivänä testattiin 87 ihmistä, joilla ei ollut oireita, ja 85 heistä sai negatiivisen testituloksen.

1. Näytä, että positiivisen testituloksen saaminen riippuu siitä, onko ihmisellä oireita tai ei. — 2 marks

Suojellakseen henkilötietoja testitikut merkitään koodilla, jossa on kaksi kirjainta (A–Z eli 26 vaihtoehtoa) ja neljä numeroa (0–9). Samaa kirjainta tai numeroa voidaan käyttää koodissa useamman kerran.

2. Laske, kuinka monta erilaista koodiyhdistelmää on mahdollista tehdä. — 2 marks

Muutamien kuukausien kuluttua saadaan selville, että ihmisistä, joilla ei ole oireita, 1,7% saa testissä positiivisen tuloksen. Eräs yritys, jossa on 20 työntekijää (kaikki oireettomia) testauttaa kaikki työntekijänsä.

3. Kerro kaksi oletusta, jotka pitää tehdä, jotta tätä tilannetta voidaan mallintaa binomijakaumalla. — 2 marks
4. Laske, millä todennäköisyydellä ainakin 1 työntekijä saa positiivisen testituloksen. — 3 marks

Myös eräs toinen yritys testauttaa kaikki työntekijänsä. Oletetaan, että tilannetta voidaan mallintaa binomijakaumalla:

$$B(84; 0,02; k) = \binom{84}{k} \cdot 0,02^k \cdot 0,98^{84-k}.$$

5. Mitä luvut 84, $0,02$ ja $0,98$ kuvaavat tässä tilanteessa? — 3 marks

5. maaliskuuta 2020 Italiasta kotiin palaava mies oli ensimmäinen COVID-19 -positiiviseksi testattu henkilö Luxemburgissa. Tätä päivää merkitään päivänä 0 alla olevassa taulukossa. Siinä on esitetty sairastuneiden määrä seuraavina päivinä ensimmäisestä tapauksesta.

Jour	0	1	2	3	4	5	6
Nombre	1	3	4	5	5	7	7

6. **Piirrä** sirontakuvaaja näistä arvoista, ja lisäksi niihin sovitettu lineaarinen ja eksponentiaalinen regressiomalli. — 3 marks
7. **Määritä** f-kohdan mallien (lineaarisen ja eksponentiaalisen) yhtälöt. — 2 marks
8. **Selitä**, miksi alkuvaiheessa oli vaikea päättää, kumpi malli (lineaarinen vai eksponentiaalinen) sopii paremmin kuvaamaan viruksen leviämistä. — 2 marks

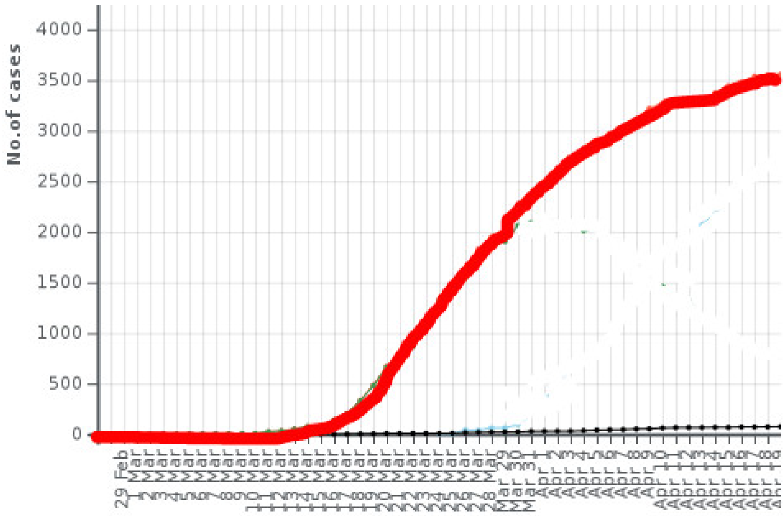
Seitsemän päivän jälkeen tehtiin uudet mallit kuvaamaan viruksen leviämistä, jotta sitä voitaisiin ennustaa tarkemmin. Näissä malleissa t tarkoittaa aikaa päivinä (viruksen saapumisesta maahan):

$$A(t) = 1,35567 \cdot 1,46977^t \qquad B(t) = 12,4396 \cdot t - 34,8571$$

Päivänä 16 COVID-19 sairastuneita rekisteröitiin 670 Luxemburgissa.

9. **Laske**, kuinka paljon sairastuneita on mallien A ja B mukaan Luxemburgissa ja vertaa mallien antamaa tulosta oikeaan arvoon. Päätä, kumpi malleista sopii paremmin tilanteeseen ja perustele vastauksesi. — 2 marks

Alla olevassa kuvaajassa on esitetty rekisteröityjen sairastumisten määrä Luxemburgissa ensimmäisen 4 viikon ajalta.



10. **Anna** kaksi mahdollista syytä siihen, miksi kasvu vähenee voimakkaasti myöhemmässä vaiheessa. — 2 marks

Tätä kuvaajaa voidaan mallintaa funktiolla:

$$C(t) = \frac{3404}{1 + 193 \cdot e^{-0,233 \cdot t}}$$

11. **Määritä**, minä päivänä tartuntojen määrän muutos oli suurin. — 2 marks