

Exercice 1

Calc. : ✓

Les détecteurs de fumée optiques contiennent une cellule photoélectrique comme composant important. Une usine produit à cet effet des cellules photoélectriques. Un dispositif vérifie automatiquement les cellules photoélectriques et rejette celles qui sont défectueuses. En moyenne, il est précis à 86%. Cependant, on constate que la précision du dispositif varie — parfois il détecte un pourcentage plus élevé de cellules photoélectriques défectueuses et parfois un pourcentage plus faible. On constate que la précision du dispositif est modélisée par une distribution normale avec un écart type de 5%.

- 1. **Déterminer** la probabilité que le dispositif soit précis à moins de 85%. 1 mark
- 2. $\frac{9}{10}$ du temps, le dispositif est précis à moins de $x\%$. **Déterminer** x . 2 marks
- 3. Sachant qu'un jour déterminé, le dispositif a une précision inférieure à 90%, **déterminer** la probabilité qu'il ait une précision supérieure à 85%. 2 marks

La fiabilité de deux types de détecteurs de fumée optiques est testée. Plus la probabilité qu'une alarme soit déclenchée est élevée, plus le détecteur est fiable.

Le type A contient une seule photocellule et se déclenche lorsque cette photocellule est activée.

Le type B contient trois cellules photoélectriques et se déclenche si au moins deux des trois cellules photoélectriques sont activées.

La probabilité qu'une cellule photoélectrique soit activée en présence de fumée est p . La probabilité que les deux types d'alarme soient déclenchés est calculée pour différentes valeurs de p .

$P(A_p)$ est la probabilité que le type A soit déclenché lorsque la probabilité est p , $P(B_p)$ est la probabilité que le type B soit déclenché lorsque la probabilité est p .

- 4. **Compléter** le tableau ci-dessous. 4 marks

p	0,3	0,5	0,7
$P(A_p)$	0,3	0,5	0,7
$P(B_p)$			
Type plus fiable			

- 5. **Déterminer** pour quelle valeur de p , le type B devient plus fiable que le type A. 2 marks
- 6. **Montrer** que l'on a les expressions suivantes en fonction de p : 4 marks

$$P(A_p) = p \quad \text{et} \quad P(B_p) = -2p^3 + 3p^2.$$

- 7. **Expliquer** la signification de la fonction R suivante par rapport au contexte de la question. 3 marks
Expliquer les calculs des lignes (1) à (3) et **interpréter** le résultat.

$$\begin{aligned}
 R : p &\mapsto R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p \\
 (1) \quad R'(p) &= -6p^2 + 6p - 1 \\
 (2) \quad R'(p_1) = 0 &\Rightarrow p_1 \approx 0,79 \\
 (3) \quad R''(p_1) &< 0
 \end{aligned}$$

Exercise 2

Calc. : ✓

Optical smoke detectors contain a photocell as an important component. A factory produces photocells for this purpose. A controller automatically checks photocells and rejects those that are faulty. On average he is 86% accurate. However, the accuracy of the controller is found to vary — sometimes he detects a higher percentage of faulty photocells and sometimes a lower percentage. The controller’s accuracy is found to be modelled by a normal distribution with a standard deviation of 5%.

- 1. **Find** the probability that the controller is less than 85% accurate. 1 mark
- 2. $\frac{9}{10}$ of the time the controller is less than $x\%$ accurate. **Determine** x . 2 marks
- 3. Given that, on a particular day, the controller is less than 90% accurate, **find** the probability that he is more than 85% accurate. 2 marks

Two types of optical smoke detector are being tested for reliability. The higher the probability of an alarm being triggered the more reliable it is.

Type A contains a single photocell and is triggered when this photocell is activated.

Type B contains three photocells and is triggered if at least two of the three photocells are activated.

The probability of a photocell being activated in the presence of smoke is p . The probability of both types of alarm being triggered is calculated for different values of p .

$P(A_p)$ is the probability of type A being triggered when the probability is p ,

$P(B_p)$ is the probability of type B being triggered when the probability is p .

- 4. **Complete** the table below. 4 marks

p	0.3	0.5	0.7
$P(A_p)$	0.3	0.5	0.7
$P(B_p)$			
More reliable type			

- 5. **Determine** for what value of p does type B become more reliable than type A. 2 marks
- 6. **Show** that, in terms of p , $P(A_p) = p$ and $P(B_p) = -2p^3 + 3p^2$. 4 marks
- 7. **Explain** the meaning of the following function R in relation to the context of the question. 3 marks
Explain what is calculated in lines (1) to (3) and **interpret** the result.

$$\begin{aligned}
 R : p &\mapsto R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p \\
 (1) \quad R'(p) &= -6p^2 + 6p - 1 \\
 (2) \quad R'(p_1) = 0 &\Rightarrow p_1 \approx 0.79 \\
 (3) \quad R''(p_1) &< 0
 \end{aligned}$$

Exercise 3

Calc. : ✓

Optische Rauchmelder enthalten als wichtigen Bestandteil eine Fotozelle. Eine Fabrik produziert zu diesem Zweck Fotozellen. Ein Gerät prüft automatisch die Fotozellen und weist diejenigen zurück, die fehlerhaft sind. Im Durchschnitt ist das Gerät zu 86% genau. Es wird jedoch festgestellt, dass die Genauigkeit des Geräts variiert — manchmal erkennt es einen höheren Prozentsatz an fehlerhaften Fotozellen und manchmal einen niedrigeren Prozentsatz. Es wird festgestellt, dass die Genauigkeit des Geräts durch eine Normalverteilung mit einer Standardabweichung von 5% modelliert wird.

- 1. **Ermitteln** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät weniger als 85% genau ist. 1 mark
- 2. $\frac{9}{10}$ der Zeit ist das Gerät weniger als $x\%$ genau. **Bestimmen** Sie x . 2 marks
- 3. Wenn angenommen wird, dass das Gerät an einem bestimmten Tag weniger als 90% genau ist, **finden** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als 85% genau ist. 2 marks

Zwei Typen von optischen Rauchmeldern werden auf ihre Zuverlässigkeit getestet. Je höher die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Alarm ausgelöst wird, desto zuverlässiger ist der Rauchmelder.

Typ A enthält eine einzelne Fotozelle und wird ausgelöst, wenn diese aktiviert wird.

Typ B enthält drei Fotozellen und wird ausgelöst, wenn mindestens zwei der drei Fotozellen aktiviert sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fotozelle bei Vorhandensein von Rauch aktiviert wird, ist p . Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Alarmtypen ausgelöst werden, wird für verschiedene Werte von p berechnet

$P(A_p)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Typ A ausgelöst wird, wenn die Wahrscheinlichkeit p ist.

$P(B_p)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Typ B ausgelöst wird, wenn die Wahrscheinlichkeit p ist.

- 4. **Füllen** Sie die folgende Tabelle aus. 4 marks

p	0,3	0,5	0,7
$P(A_p)$	0,3	0,5	0,7
$P(B_p)$			
Zuverlässigerer Typ			

- 5. **Bestimmen** Sie, für welchen Wert von p der Typ B zuverlässiger wird als der Typ A. 2 marks
- 6. **Zeigen** Sie, dass, in Bezug auf p , $P(A_p) = p$ und $P(B_p) = -2p^3 + 3p^2$. 4 marks
- 7. **Erläutern** Sie die Bedeutung der folgenden Funktion R in Bezug auf den Kontext der Fragestellung. **Erklären** Sie, was in den Zeilen (1) bis (3) berechnet wird und **interpretieren** Sie das Ergebnis. 3 marks

$$\begin{aligned}
 R : p &\mapsto R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p \\
 (1) \quad R'(p) &= -6p^2 + 6p - 1 \\
 (2) \quad R'(p_1) = 0 &\Rightarrow p_1 \approx 0,79 \\
 (3) \quad R''(p_1) &< 0
 \end{aligned}$$

Exercise 4

Calc. : ✓

Optisissa palohälyttimissä tärkeä komponentti on valokenno. Eräs yritys valmistaa valokennoja tähän tarkoitukseen. Tarkastaja tarkastaa kennoja ja hylkää ne, jotka ovat viallisia. Keskimäärin hän lajittelee kennot 86% oikein. Tarkastajan tarkkuus kuitenkin vaihtelee, joskus hän löytää enemmän viallisia kennoja ja joskus vähemmän. Tarkastajan tarkkuus noudattaa normaalijakamaa, jonka keskihajonta on 5%.

- 1. Millä todennäköisyydellä tarkastaja on alle 85% oikeassa? 1 mark
- 2. $\frac{9}{10}$ osan ajasta tarkastaja on alle $x\%$ oikeassa. Määritä x . 2 marks
- 3. Tiedetään, että eräänä päivänä tarkastaja oli alle 90% oikeassa. Laske, millä todennäköisyydellä hän oli tällöin myös yli 85% oikeassa. 2 marks

Kahdentyyppisiä palohälyttimiä testataan luotettavuudessa. Mitä suuremmalla todennäköisyydellä palohälytyn alkaa hälyttää, sitä luotettavampi se on.

Tyyppin A palohälyttimet sisältävät yhden valokennon ja se alkaa hälyttää, kun tämä valokenno aktivoituu.

Tyyppin B palohälyttimissä on kolme valokennoa, ja se alkaa hälyttää, jo vähintään kaksi valokennoa aktivoituu.

Todennäköisyys, että valokenno aktivoituu savun läsnäollessa on p . Todennäköisyys, että palohälyttimet hälyttävät on laskettu eri $p : n$ arvoille.

$P(A_p)$ on todennäköisyys, että palohälytyn A hälyttää, kun todennäköisyys on p ;

$P(B_p)$ on todennäköisyys, että palohälytyn B hälyttää, kun todennäköisyys on p .

- 4. Täydennä oheinen taulukko. 4 marks

p	0.3	0.5	0.7
$P(A_p)$	0.3	0.5	0.7
$P(B_p)$			
Luotettavampi palohälytyn			

- 5. Määritä, millä $p : n$ arvolla palohälytyn B on luotettavampi kuin A? 2 marks
- 6. Osoita, että $P(A_p) = p$ ja $P(B_p) = -2p^3 + 3p^2$. 4 marks
- 7. Selitä, mitä alla olve funktio R ilmaisee tässä kontekstissa. Selitä, mitä on laskettu riveillä (1)–(3) ja tulkitse tulos. 3 marks

$$\begin{aligned}
 R : p &\mapsto R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p \\
 (1) \quad R'(p) &= -6p^2 + 6p - 1 \\
 (2) \quad R'(p_1) = 0 &\Rightarrow p_1 \approx 0.79 \\
 (3) \quad R''(p_1) &< 0
 \end{aligned}$$