

Exercise 1

Calc. : ✓

Tom ja Simon pelaavat lautapeliä. Aina kun Tom onnistuu liikuttamaan pelinappulaansa kerran pelilaudan ympäri, hän saa 5 pistettä. Aina kun Tom onnistuu liikuttamaan pelinappulaansa kerran laudan ympäri, hän saa 10% kaikista siihen mennessä keräämistään pisteistä. Molemmilla on aluksi 10 pistettä.

- 1. Laske Tomin pistemäärä, kun hän on liikkunut 20 kertaa laudan ympäri. 2 marks
- 2. Kirjoita lauseke Tomin pistemäärälle $n : n$ funktiona ($T(n)$), kun Tom on liikkunut n kertaa laudan ympäri. 2 marks
- 3. Selitä, miksi Simonin pisteet voidaan ilmaista seuraavalla lausekkeella (kun Simon on liikkunut n kertaa laudan ympäri): 2 marks

$$S(n) = 11 \cdot 1.1^{n-1}$$

- 4. Simon ja Tom ovat menneet yhtä monta kierrosta laudan ympäri ja Simonin pistemäärä on juuri mennyt ohi Tomin pistemäärästä. 3 marks
Laske, kuinka monta kierrosta he ovat päässeet silloin laudan ympäri.

Tom haastaa Simonin noppapeliin. Kahta painottamatonta 6-tahkoista noppaa heitetään samaan aikaan ja lasketaan niiden silmälukujen summa. Jos summa on alle 6, Simon saa 10 senttiä. Jos summa on 6–9, Simon häviää 5 senttiä. Jos summa on vähintään 10, Simon saa 30 senttiä. Voittosummien todennäköisyydet on esitetty alla olevassa taulukossa, jossa N on silmälukujen summa.

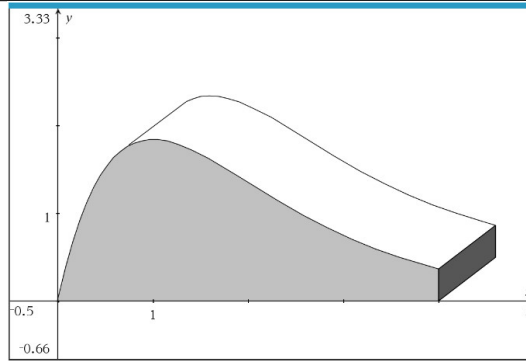
N	$n < 6$	$6 \leq n \leq 9$	$n \geq 10$
Voittosumma n	10 senttiä	-5 senttiä	30 senttiä
$P(N = n)$	a	$\frac{20}{36}$	b

- 5. Näytä, että $a = \frac{10}{36}$ ja $b = \frac{6}{36}$. 2 marks
- 6. Laske Simonin voiton odotusarvo tässä pelissä ja kommentoi, onko Simonin kannattavaa pelata. 2 marks
- 7. Sanotaan, että peli on reilu, jos voiton odotusarvo on 0. 2 marks
Määritä, kuinka monta senttiä pitäisi häviön olla silloin, kun silmälukujen summa on 6–9, jotta peli olisi reilu.

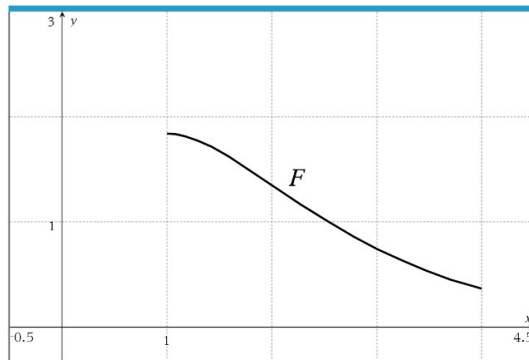
Exercise 2

Calc. : ✓

Leikkikentän liukumäkiä valmistava firma haluaa tarjota asiakkailleen uuden mallin. Tässä on mallikuva uudesta liukumäestä:



Liukumäen sivuprofiili mitataan metreissä ja sitä voidaan kuvata funktiolla $F(x) = (ax - b)e^{-x}$, for $1 \leq x \leq 4$, missä a ja b ovat parametrejä. Funktion F kuvaaja on esitetty alla:



1. Suunnitelman mukaan funktion F kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin pitäisi olla vaakasuora.

Määritä parametri b niin, että suunnitelma pitää paikkansa.

3 marks

2. Lisäksi on suunniteltu, että liukumäki lähtisi korkeudelta 1,85 m.

Määritä parametri a tässä tapauksessa.

2 marks

Oletetaan, että sivuprofiilia kuvaava funktio on $F(x) = 5x \cdot e^{-x}$.

3. Näytä, että sivuseinien kokonaispinta-ala (harmaalla varjostetut alueet) on $5 - \frac{25}{e^4}$ m².

2 marks

4. Määritä se piste liukumäellä, jossa liukumäki on jyrkin.

3 marks

Exercise 3

Calc. : ✓

Optisissa palohälyttimissä tärkeä komponentti on valokenno. Eräs yritys valmistaa valokennoja tähän tarkoitukseen. Tarkastaja tarkastaa kennoja ja hylkää ne, jotka ovat viallisia. Keskimäärin hän lajittelee kennot 86% oikein. Tarkastajan tarkkuus kuitenkin vaihtelee, joskus hän löytää enemmän viallisia kennoja ja joskus vähemmän. Tarkastajan tarkkuus noudattaa normaalijakamaa, jonka keskihajonta on 5%.

1. Millä todennäköisyydellä tarkastaja on alle 85% oikeassa? 1 mark
2. $\frac{9}{10}$ osan ajasta tarkastaja on alle $x\%$ oikeassa. Määritä x . 2 marks
3. Tiedetään, että eräänä päivänä tarkastaja oli alle 90% oikeassa. Laske, millä todennäköisyydellä hän oli tällöin myös yli 85% oikeassa. 2 marks

Kahdentyyppisiä palohälyttimiä testataan luotettavuudessa. Mitä suuremmalla todennäköisyydellä palohälytyn alkaa hälyttää, sitä luotettavampi se on.

Tyyppin A palohälyttimet sisältävät yhden valokennon ja se alkaa hälyttää, kun tämä valokenno aktivoituu.

Tyyppin B palohälyttimissä on kolme valokennoa, ja se alkaa hälyttää, jo vähintään kaksi valokennoa aktivoituu.

Todennäköisyys, että valokenno aktivoituu savun läsnäollessa on p . Todennäköisyys, että palohälyttimet hälyttävät on laskettu eri $p : n$ arvoille.

$P(A_p)$ on todennäköisyys, että palohälytyn A hälyttää, kun todennäköisyys on p ;

$P(B_p)$ on todennäköisyys, että palohälytyn B hälyttää, kun todennäköisyys on p .

4. Täydennä oheinen taulukko. 4 marks

p	0.3	0.5	0.7
$P(A_p)$	0.3	0.5	0.7
$P(B_p)$			
Luotettavampi palohälytyn			

5. Määritä, millä $p : n$ arvolla palohälytyn B on luotettavampi kuin A? 2 marks
6. Osoita, että $P(A_p) = p$ ja $P(B_p) = -2p^3 + 3p^2$. 4 marks
7. Selitä, mitä alla olve funktio R ilmaisee tässä kontekstissa. Selitä, mitä on laskettu riveillä (1)–(3) ja tulkitse tulos. 3 marks

$$\begin{aligned}
 R : p &\mapsto R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p \\
 (1) \quad R'(p) &= -6p^2 + 6p - 1 \\
 (2) \quad R'(p_1) = 0 &\Rightarrow p_1 \approx 0.79 \\
 (3) \quad R''(p_1) &< 0
 \end{aligned}$$

Exercise 4

Calc. : ✓

Olkoon annettu taso $E : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$ ja suorat:

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$

missä a kuuluu reaalilukuihin.

1. Määritä suorien ja tason leikkauspisteet $a : n$ funktiona. 4 marks
2. Määritä, millä $a : n$ arvolla suorilla ja tasolla ei ole leikkauspistettä. Tulkitse, mitä tämä tarkoittaa geometrisesti. 3 marks