Exercise 1 Calc. : ✓

partie a

L'objet de cet exercice est l'étude de deux fonctions intervenant dans un modèle économique.
La courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ donnée en annexe (à rendre avec la copie) est la représentation graphique, dans un repère orthogonal du plan, de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-0,7x+2,1}$.
De même, la courbe $\left(\mathcal{C}_g\right)$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle $[0;5]$ par : $g(x) = 0,5x + 0,7$.
On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $[0;5]$.

1. On appelle h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   (a) Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0;5]$.
   (b) Étudier le signe de $h'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;5]$. En déduire que la fonction h est strictement monotone sur cet intervalle.
   (c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;5]$ et donner à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-3} près (on ne demande pas de justification sur la méthode d'obtention de cette valeur).
   (d) Déduire de l'étude précédente les valeurs arrondies à 10^{-2} des coordonnées du point d'intersection F de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et $\left(\mathcal{C}_g\right)$.
2. Dans la suite du problème, on prendra $\alpha = 2,17$ et $f(\alpha) = g(\alpha) = 1,79$.
   (a) Soient les points $C\,(0; f(\alpha))$ et $E\,(\alpha; 0)$. Donner une valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire du rectangle $OCFE$ exprimée en unités d'aire.
   (b) Interpréter graphiquement le nombre $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de α et en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.

partie b

La fonction f définie dans la partie A représente la fonction de demande d'un produit ; elle met en correspondance le prix $f(x)$ exprimé en milliers d'euros et la quantité x, exprimée en tonnes, que sont prêts à acheter les consommateurs à ce prix.
La fonction g définie dans la partie A est la fonction d'offre de ce produit ; elle met en correspondance le prix $g(x)$ exprimé en milliers d'euros et la quantité x, exprimée en tonnes, que sont prêts à vendre à ce prix les producteurs.
On appelle prix d'équilibre du marché le prix pour lequel la quantité demandée par les consommateurs est égale à celle offerte par les producteurs. On note p_0 le prix d'équilibre et q_0 la quantité échangée sur le marché à ce prix.
Dans la situation étudiée on a donc : $f\left(q_0\right) = g\left(q_0\right)$.

1. Déduire des résultats donnés dans la partie A les valeurs de q_0 et de p_0.
2. Tous les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher (au-dessus du prix p_0) réalisent une économie. Le montant économisé par les consommateurs, appelé surplus des consommateurs, vaut par définition $\displaystyle\int_0^{q_0} f(x)\,\mathrm{d}x - p_0 \times q_0$. Il s'exprime ici en milliers d'euros.
   (a) Sur le graphique de l'annexe :
      - indiquer les valeurs q_0 et p_0 sur les axes de coordonnées ;
      - hachurer le domaine dont l'aire s'écrit : $\displaystyle\int_0^{q_0} f(x)\,\mathrm{d}x - p_0 \times q_0$.
   (b) Calculer, en milliers d'euros, le surplus des consommateurs.

ANNEXE