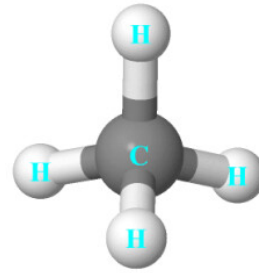


**Exercise 1**

Calc. : ✓

Metaanimolekyyliä  $\text{CH}_4$  voidaan mallintaa tetraedrilla  $\text{OABD}$ , missä  $\text{O}(0; 0; 0)$ ,  $\text{A}(3; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$ ,  $\text{B}(3; 3\sqrt{3}; 0)$  ja  $\text{D}(6; 0; 0)$ . Nämä neljä kärkipistettä kuvastavat vetyatomien H paikkoja. Hiiliatomin C paikkaa merkitään pisteellä G, joka sijaitsee tetraedrin sisällä.



- Tetraedri on säännöllinen, joten sen kaikki sivut eli särmät ovat yhtä pitkät. Näytä, että särmän pituus on 6. 1 mark
- Näytä, että pisteen A kohtisuoran projektio  $A'$   $xy$ -tasolle on piste  $(3; \sqrt{3}; 0)$ . 2 marks
- Olkoon pisteet  $\text{I}\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{6}\right)$  ja  $\text{J}\left(\frac{9}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ .  
Piste I on segmentin [AO] keskipiste ja piste J on segmentin [BD] keskipiste. Piste G on pisteiden A ja  $A'$  kautta kulkevan suoran sekä pisteiden I ja J kautta kulkevan suoran leikkauspiste.
  - Näytä, että  $G : n$  koordinaatit ovat  $\left(3; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ . 3 marks
  - Näytä, että pisteiden G ja A välinen etäisyys on  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .  
Pisteen G etäisyys myös muista tetraedrin kärjistä on tämä sama. 1 mark
  - Todellisuudessa hiili- ja vetyatomien etäisyys C–H -sidoksessa on noin 109 pikometriä. Määritä pikometreinä kahden vetyatomien välinen etäisyys. 2 marks
- Määritä kahden C–H -sidoksen välinen kulma. 3 marks

**Exercise 2**

Calc. : ✓

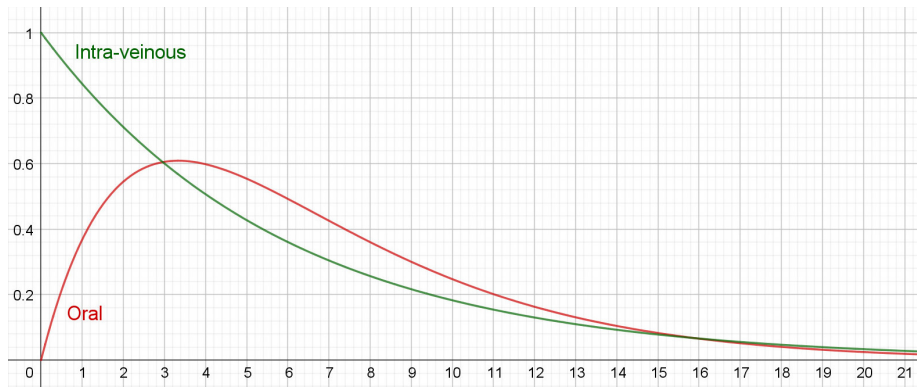
- Olkoon kompleksiluku määritelty:  $w = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ .
  - Kirjoita kompleksiluku  $w$  Eulerin muodossa. 2 marks
  - Määritä luonnollisen luvun  $n$  kaikki arvot, joille  $w^n$  on puhtaasti reaalinen. 3 marks
- Olkoon  $M_n$  kompleksilukua  $z_n$  kuvaava piste kompleksitasolla (missä  $n$  on luonnollinen luku) ja luvut  $z_n$  määritellään:
 
$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) \cdot z_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
  - Laske  $z_1$  ja  $z_2$ , ja sijoita pisteet  $M_0, M_1, M_2$  kompleksitasolle (yksi ruutu on 4 cm). 2 marks
  - Määritellään lukujono  $(r_n)$  seuraavasti (missä  $n$  on luonnollinen luku):  $r_n = |z_n|$ .  
Määritellään lukujono  $(r_n)$  on geometrinen jono, jonka suhdeluku on  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .  
Määritä jonon  $r_n$  lauseke. 3 marks
  - Kompleksiluku  $z_n$  voidaan kirjoittaa myös seuraavassa muodossa (missä  $n$  on luonnollinen luku):  $z_n = r_n e^{\frac{in\pi}{4}}$ .  
Millä  $n : n$  arvoilla pisteet  $M_n$  sijaitsevat reaaliakselilla? 1 mark
  - Missä pisteessä kompleksitasolla sijaitsee piste  $M_{10}$  joka kuvaa kompleksilukua  $z_{10}$ ? 2 marks

### Exercise 3

Calc. : ✓

Alla olevassa kuvassa on esitetty kahden eri lääkkeen konsentraatio potilaan veressä ajan funktiona (minuuteissa välillä  $[0, 20]$ ): suonensisäinen lääkkeen (intra-veinosis) ja suun kautta annettavan lääkkeen (oral). Molemmat lääkkeet annetaan kerran.

Arvo 1 y-akselilla vastaa suonensisäisen lääkkeen alkukonsentraatiota.



Vastaa kuvan avulla kysymyksiin 1.–4 (sillä tarkkuudella, mitä kuvasta voit nähdä):

1. Kuvaile suonensisäisen lääkkeen konsentraation muutosta lääkkeen antamisen jälkeen. 1 mark
2. Milloin suun kautta annettavan lääkkeen konsentraatio on suurimmillaan? Mikä on silloin tämän lääkkeen konsentraatio? 1 mark
3. Missä kohdassa on suun kautta annettavan lääkkeen käyrän käännepiste? Mikä on tällöin konsentraation muutosnopeus? 2 marks
4. Millä aikavälillä suun kautta annettavan lääkkeen konsentraatio on suurempi kuin suonensisäisen lääkkeen? 2 marks

Näitä kuvaajia voidaan kuvata seuraavilla funktioilla:

$$f(t) = e^{-0.17t} \quad \text{ja} \quad g(t) = t \cdot e^{-0.3t-0.7}$$

5. Perustele, miksi funktio  $f$  sopii kuvaamaan suonensisäisen lääkkeen konsentraatiota ja miksi funktio  $g$  suun kautta annettavan. 3 marks
6. Määritä laskimen avulla, milloin lääkkeiden konsentraatiot ovat samat. 2 marks
7. Käyrän ja  $x$ -akselin välinen pinta-ala kertoo kokonaisaltistumisen lääkkeelle tietyllä välillä. Laske kokonaisaltistuminen molempien lääkkeiden tapauksessa erikseen ensimmäisen viiden minuutin aikana. 2 marks

**Exercise 4**

Calc. : ✓

Pyöristä 3 desimaalin tarkkuuteen.

1. Oheisessa taulukossa on esitetty Ranskassa myytyjen sähköpyörien määrä vuosien 2007–2017 välillä:

Vuosi	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Vuosien määrä vuodesta 2007 $x_i$	0	2	4	6	8	10
Myytyjen sähköpyörien määrä miljoonina $n_i$	10	23	37	57	102	278

Data: Observatoire du Cycle

- (a) Määritä laskimen avulla muuttujien  $x$  ja  $n$  välisen regressiosuoran yhtälö ja näytä, että korrelaatiokerroin on tällöin 0,85. 2 marks
- (b) Määritetään uusi muuttuja  $y_i = \ln(n_i)$ . Tällöin muuttujien  $x$  ja  $y$  välille sovitetun regressiosuoran yhtälö on  $y = 0,307x + 2,353$ , ja korrelaatiokerroin on tällöin 0,981. 2 marks  
 Käytä pisteisiin paremmin sopivaa mallia ja laske myytyjen sähköpyörien määrä vuonna 2023.
2. Eräs yritys valmistaa suuren määrän sähköpyöriä. Olkoon  $X$  satunnaismuuttuja, joka ilmaisee, kuinka pitkän matkan (kilometreissä) sähköpyörällä voi ajaa yhdellä latauksella. Oletetaan, että  $X$  noudattaa normaalijakaumaa. Lisäksi tiedetään, että  $P(X \geq 84) = 0,2266$  ja että  $P(X \leq 86) = 0,8943$ . 4 marks  
 Määritä näiden tietojen avulla odotusarvo ja keskihajonta. Pyöristä vastaus kilometrin tarkkuuteen.
3. Oletetaan, että 4% sähköpyörissä käytettävistä litium-akuista on viallisia. Olkoon  $Y$  satunnaismuuttuja, joka ilmaisee viallisten akkujen määrän 150 sattumanvaraisesti valitun akun joukossa. 2 marks
- (a) Laske  $P(Y \leq 5)$  ja kerro, mitä jakaumaa käytät. 2 marks
- (b) Millä todennäköisyydellä kaikki sattumanvaraisesti valitut 150 akkua ovat viattomia? 2 marks