Exercise 1 Calc. : ✓

The Island

Part 1 (Parts 1 and 2 of this question can be solved independently.)

The table below gives the measured population on an island.

Beginning of the year	2015	2020
Population	5 500	7 250

a) Use a linear model to **predict** the population at the beginning of 2023. — 2 marks

b) Peter uses an exponential model $p(t) = k \cdot a^t$ to model the population. In this model, $t = 0$ corresponds to the beginning of 2015 and a and k are parameters.

Find the parameters a and k of the model $p(t)$. — 3 marks

c) **Show** that the exponential model $f(t) = 5\,500 \cdot \mathrm{e}^{0.05525 \cdot t}$ adequately fits the given data. — 2 marks

For questions d), e) and f), you can use the exponential model

$$f(t) = 5\,500 \cdot \mathrm{e}^{0.05525 \cdot t}$$

In this model $t = 0$ corresponds to the beginning of 2015.

d) **Determine** the annual growth rate of the exponential model. — 2 marks

e) **Calculate** $f'(5)$ and **interpret** what the result means in the given context. — 2 marks

f) Use the exponential model to **find** in which year the population would reach 10 000 people. — 3 marks

At the beginning of 2022, the island was hit by an earthquake. Although nobody was hurt in the event, 6 000 people decided to leave the island immediately. After they left, the growth rate of the island population was the same as before.

g) **Investigate** in which year the island population will be the same as it was at the beginning of 2015. — 3 marks

Part 2

The day length is the time between sunrise and sunset. Peter lives on the island and measured the day length of every first day of the month during a whole (non-leap) year. The results are given below:

Date	1st of Jan	1st of Feb	1st of Mar	1st of Apr	1st of May	1st of Jun
Daylength (in hours)	7.67	8.55	10	11.2	12.33	13

Date	1st of Jul	1st of Aug	1st of Sep	1st of Oct	1st of Nov	1st of Dec
Daylength (in hours)	13.05	12.67	11.6	10.35	8.95	7.83

Peter models the day length $h(x)$ with the periodic model $h(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$, where $h(x)$ is expressed in hours, x is expressed in days and $x = 1$ corresponds to the 1st of January.

h) **Explain** why the day length $h(x)$ can be modelled with a periodic model and **give** the period of this model. — 2 marks

i) **Estimate** the amplitude of this periodic model. — 2 marks

j) Hence, **investigate** for which values of the parameters a, b, c, and d the periodic model $h(x)$ fits the data adequately. — 4 marks

Exercise 2 Calc. : ✓

L'île

Partie 1 (Les parties 1 et 2 de cette question peuvent être résolues indépendamment.)
Le tableau ci-dessous donne la population recensée sur une île.

Début de l'année	2015	2020
Population	5 500	7 250

a) Utiliser un modèle affine pour **prévoir** la population au début de l'année 2023. — 2 marks

b) Pierre utilise un modèle exponentiel $p(t) = k \cdot a^t$ pour modéliser la 3 population. Dans ce modèle, $t = 0$ correspond au début de 2015 et, a et k sont des paramètres.
Calculer les valeurs des paramètres a et k de la fonction $p(t)$. — 3 marks

c) **Montrer** que le modèle exponentiel $f(t) = 5\ 500 \cdot e^{0{,}05525 \cdot t}$ correspond bien aux données. — 2 marks

Pour les questions d), e), f), vous pouvez utiliser le modèle :

$$f(t) = 5\ 500 \cdot e^{0{,}05525 \cdot t}$$

Dans ce modèle $t = 0$ correspond au début de l'année 2015.

d) **Déterminer** le taux de croissance annuel du modèle exponentiel. — 2 marks

e) **Calculer** $f'(5)$ et **interpréter** à quoi correspond cette valeur dans le contexte donné. — 2 marks

f) Utiliser le modèle exponentiel pour **trouver** en quelle année la population atteindra 10 000 personnes. — 3 marks

Au début de 2022, l'île a été frappée par un tremblement de terre. Bien que personne n'ait été blessé dans l'événement, 6 000 personnes ont décidé de quitter l'île immédiatement. Après leur départ, le taux de croissance de la population de l'île est resté le même qu'avant le séisme.

g) **Chercher** en quelle année la population de l'île sera à nouveau la même qu'au début de 2015. — 3 marks

Partie 2
La longueur du jour est le temps compté entre le lever du soleil et le coucher du soleil. Pierre vit sur l'île et mesure la longueur du jour de chaque premier jour du mois durant une année entière (non bissextile). Les mesures sont données ci- dessous :

Date	1er janvier	1er février	1er mars	1er avril	1er mai	1er juin
Durée du jour (en heures)	7,67	8,55	10	11,2	12,33	13

Date	1er juillet	1er août	1er septembre	1er octobre	1er novembre	1er décembre
Durée du jour (en heures)	13,05	12,67	11,6	10,35	8,95	7,83

Pierre modélise la durée du jour $h(x)$ avec le modèle périodique $h(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$, où $h(x)$ est exprimée en heures, x est exprimé en jours et $x = 1$ correspond au premier janvier.

h) **Expliquer** pourquoi la durée du jour peut être modélisée par une fonction périodique et **donner** la période de cette fonction. — 2 marks

i) **Estimer** l'amplitude de ce modèle périodique. — 2 marks

j) En conséquence, **rechercher** les valeurs des paramètres a, b, c, et d qui correspondent le mieux au modèle périodique $h(x)$. — 4 marks