Exercise 1 Calc. : ✗

La durée du jour $L(t)$ en heures à un endroit donné a été enregistrée sur une année. Elle peut être modélisée par la fonction

$$L(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}t\right) + 12,$$

où t est le temps exprimé en jours.

Interpréter le résultat de $\displaystyle\int_0^{365} L(t)\,\mathrm{d}t$ et **expliquer** pourquoi ce résultat est égal à $12{\cdot}365 = 4\,380$. 5 marks

Exercise 2 Calc. : ✗

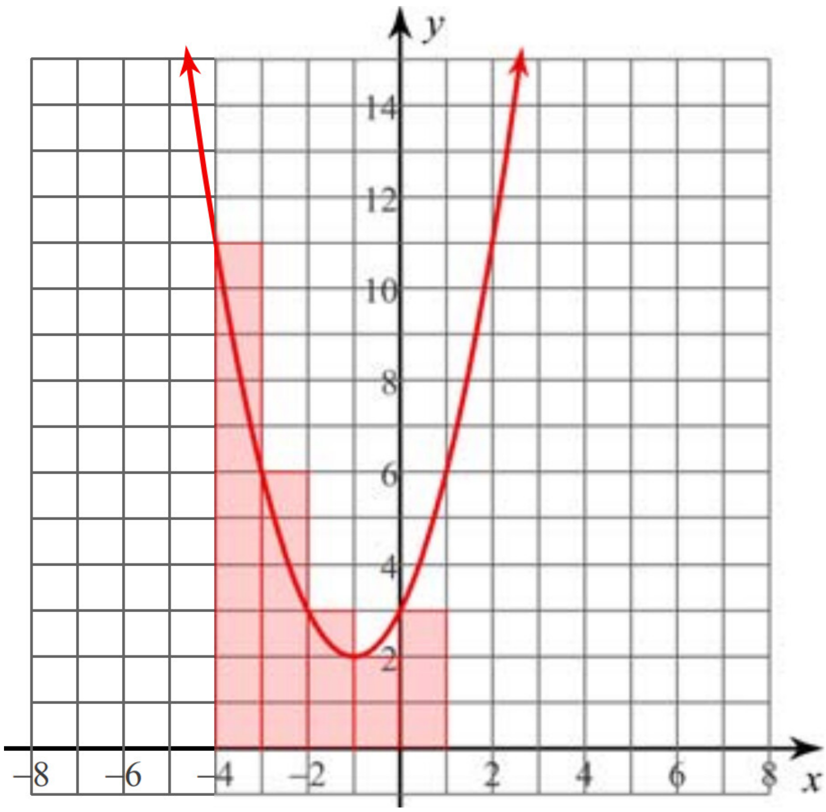
On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 7x + 3$.

Déterminer la primitive F de f telle que $F(2) = 5$. 5 marks

Exercise 3 Calc. : ✗

Voici la courbe de la fonction définie par : 5 marks

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$



Un étudiant veut trouver une approximation de :

$$\int_{-4}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

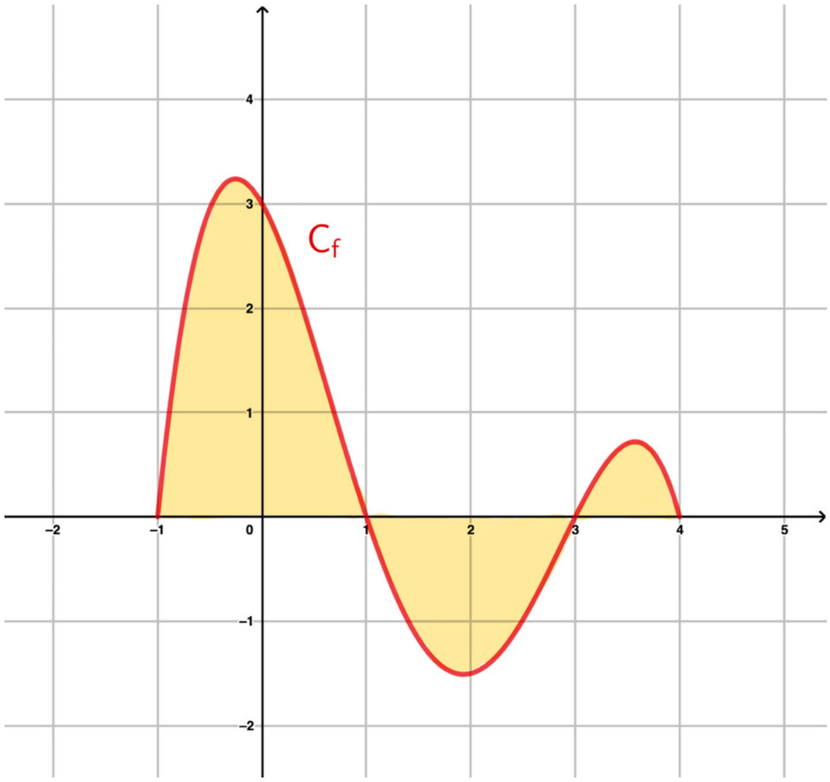
a) **Expliquez**, en vous référant au graphique, ce que signifie cette notation.

b) À l'aide du graphique, **estimez** cette valeur par le calcul des rectangles rosés.

c) Pensez-vous que cette estimation est au-dessus ou en dessous par rapport à la valeur réelle ? **Expliquez**.

Exercise 4 Calc. : ✗

Soit la courbe d'une fonction f définie par le graphique ci-dessous.
On s'intéresse à l'aire de la partie colorée.



1. **Expliquer** pourquoi l'aire de la partie colorée n'est pas égale à $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$. — 2 marks
2. **Calculer** l'aire de la partie colorée en unités d'aires (u.a.), en utilisant les résultats suivants : — 3 marks

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 4,07 \text{ u.a.} \qquad \int_{1}^{3} f(x)\,dx \approx -1,93 \text{ u.a.} \qquad \int_{3}^{4} f(x)\,dx \approx 0,47 \text{ u.a.}$$

Exercise 5 Calc. : ✗

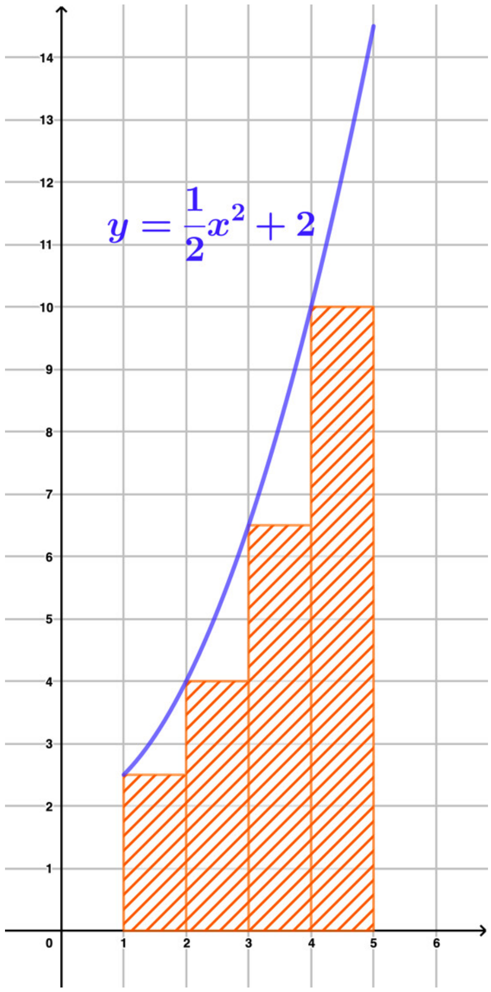
Soit G une primitive telle que $G(x) = x^3 - x^2 - 3x + c$ où c est une constante réelle.

1. **Déterminer** l'expression de la primitive G telle que $G(2) = 4$. — 2 marks
2. **Montrer** que G est une primitive de la fonction g : — 1 mark
   $g(x) = 3x^2 - 2x - 3$
3. On admet que $G(x) = x^3 - x^2 - 3x + 6$. **Calculer** : — 2 marks

$$\int_{0}^{1} g(x)\,dx$$

Exercise 6 Calc. : ✗

Soit la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$.



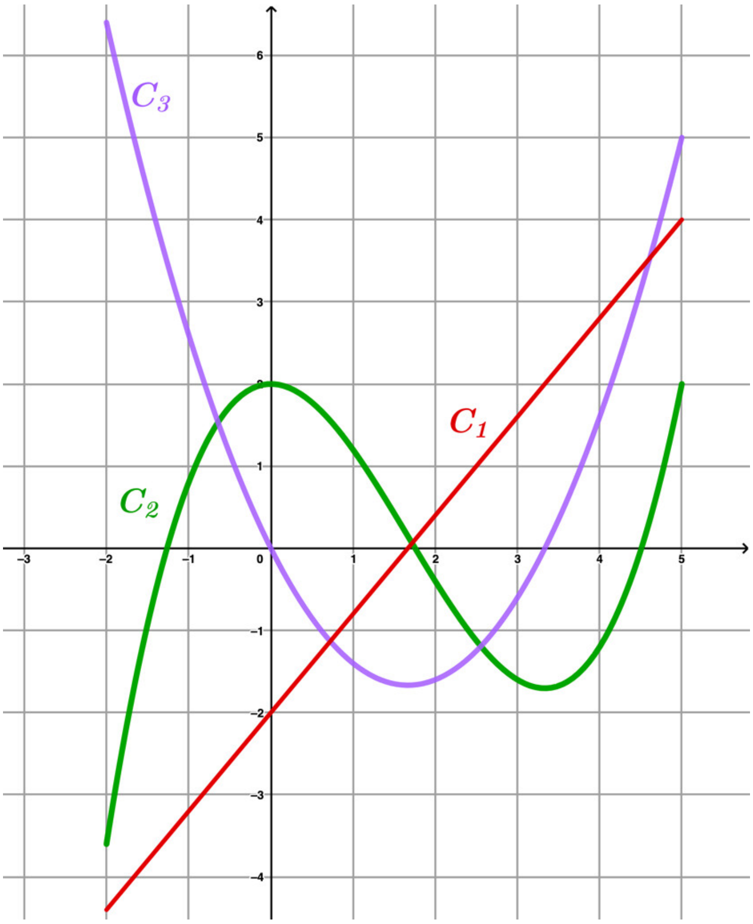
Calculer à l'aide de la méthode des rectangles, en utilisant les rectangles inférieurs représentés ci-dessus, une approximation de l'aire délimitée par la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.

5 marks

Exercise 7 Calc. : ✗

Soient trois courbes représentatives de fonctions C_1, C_2 et C_3 dans le repère ci-dessous.
Identifier parmi ces trois courbes : laquelle est la fonction f, laquelle est F, la primitive de f, et laquelle est f', la dérivée de f. **Justifier** votre réponse.

5 marks

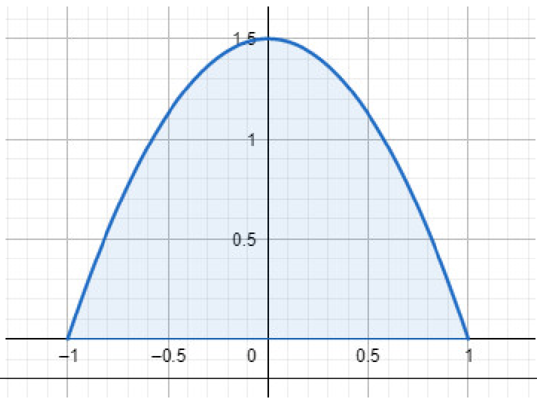


Exercise 8 Calc. : ✗

As part of their leaving school celebrations, a group of S7 students from a European School go camping. Their tent door is in the shape of a parabola with height, $f(x)$, and width, x, and can be modelled as:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

Both the height, $f(x)$, and width, x, of the tent door are, given, in metres.
The graph of $y = f(x)$ is shown.
Show that the area of the tent door is 2 m^2.



5 marks

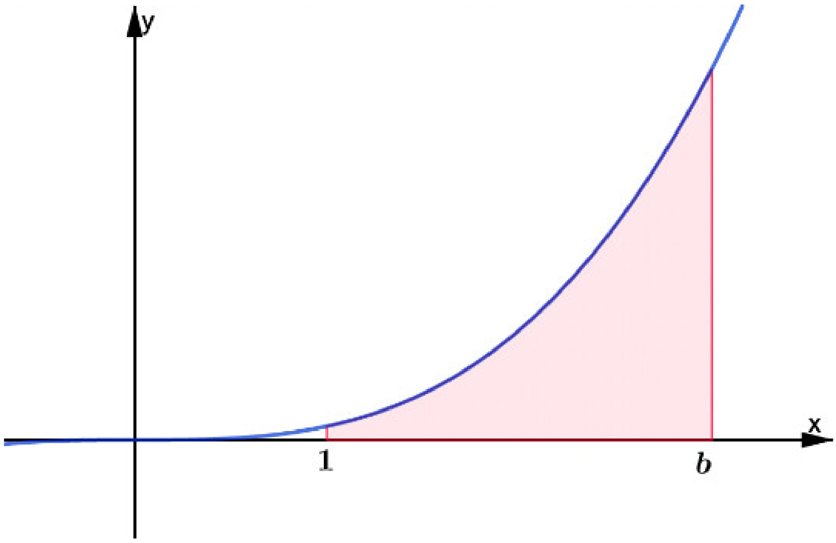
Exercise 9 Calc. : ✗

Consider $F(x)$ the primitive of the function $f(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2$$

The graph of the function $f(x)$ is shown in the diagram below.
Find the value of b if the shaded area is 20 units^2, knowing that $b > 1$.

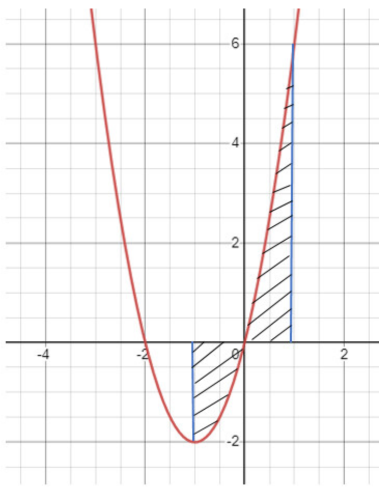
5 marks



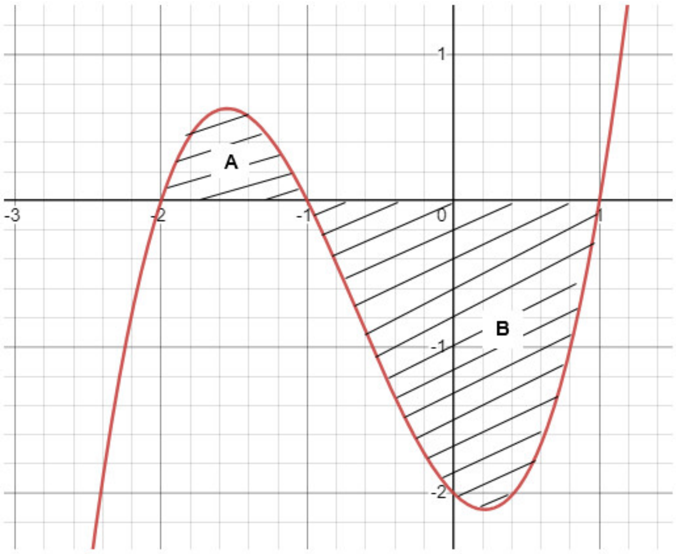
Exercise 10 Calc. : ✗

The function $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2$ is a primitive function of $f(x)$.
Consider the graph of the function $f(x)$ shown below.
Show that the shaded area bounded by the graph of $f(x)$, the lines $x = -1$ and $x = 1$, and the x-axis is equal to 4 square units.

5 marks



Exercise 11 Calc. : ✗

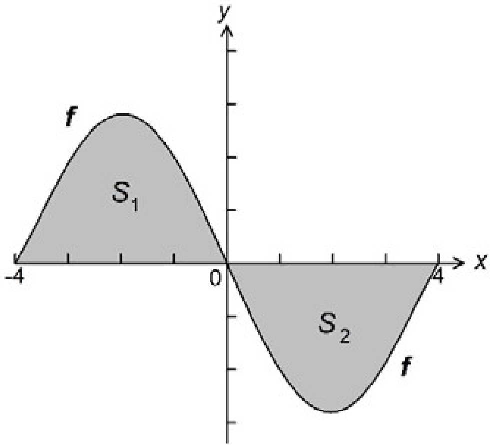
Consider the graph of $f(x)$ shown below. Given that $A = 1.37$ and $B = 4.50$, **find** $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.  	5 marks

Exercise 12 Calc. : ✗

On considère les fonctions f et F définies par $$f(x) = 4x^3 + 3x^2 \qquad \text{et} \qquad F(x) = x^4 + x^3 + 5.$$	
a) **Montrer** que F est une primitive de f.	2 marks
b) **Calculer** $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.	3 marks

Exercise 13 Calc. : ✗

La figure ci-dessous montre le graphique d'une fonction f et deux surfaces S_1 et S_2 délimitées par le graphique de f et l'axe des abscisses.
Le graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.



On donne : $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$.

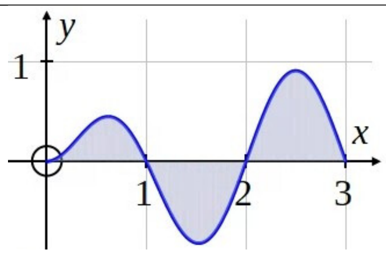
a) **Interpréter** l'intégrale $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ graphiquement. — 2 marks

b) **Déterminer** — 3 marks

1. $\displaystyle\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. l'aire de la surface S_2.

Exercise 14 Calc. : ✗

A new company logo is shown on the right and will be made out of steel to be displayed outside the headquarters.
The curve is defined by the function $y = f(x)$.



a) **Identify** which two of the following integrals would correctly calculate the area of steel required. — 2.5 marks

1. $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{0}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$

b) **Explain** why the other integrals would give an incorrect answer. — 2.5 marks

Exercise 15 Calc. : ✗

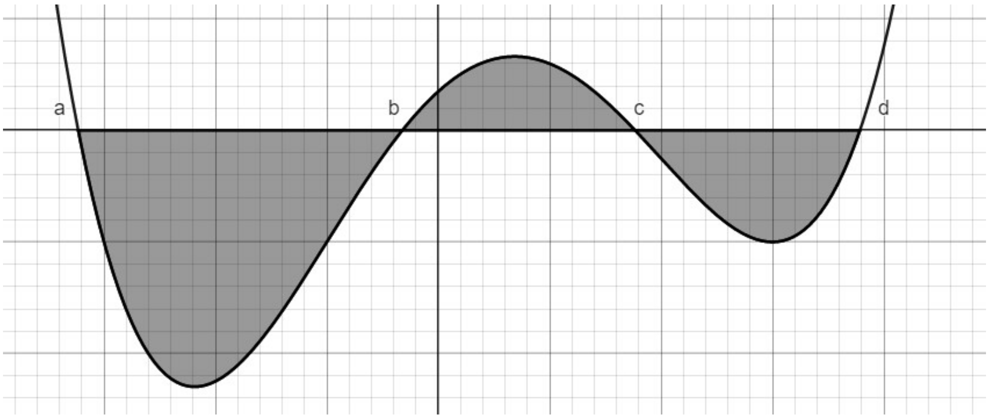
Let $f(x) > g(x)$ be two positive functions, with respective primitives $F(x)$ and $G(x)$. It is further known, that:

x	1	4
$F(x)$	-3	8
$G(x)$	2	6

Determine the area bounded by the graphs of $f(x)$ and $g(x)$ and the lines of equations $x = 1$ and $x = 4$. 5 marks

Exercise 16 Calc. : ✗

The graph of the function $y = f(x)$ is presented here:



Given the following results:

$$\int_b^c f(x)\,dx = 2.3 \qquad \int_a^c f(x)\,dx = -1.1 \qquad \int_b^d f(x)\,dx = -0.4$$

...**calculate** the value of the shaded area. 5 marks

Exercise 17 Calc. : ✗

State if the following sentences are True (T) or False (F) and **justify** your statements:

a) The point A$(\mathrm{e}; 1)$ belongs to the function $y = \ln(x)$. 1 mark

b) When a function is positive, its first derivative is necessarily increasing. 1 mark

c) Let f be a function defined by $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Its first derivative is equal to zero for $x = 0$. 1 mark

d) Let f be a function defined over $\mathbb{R}$ such that $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx > 0$ and $\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx < 0$. 1 mark

We can thus write : $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = 0$

e) A set of bivariate data points $(x; y)$ has a linear correlation coefficient of -0.95. We can thus state that the correlation is weak. 1 mark

Exercise 18 Calc. : ✗

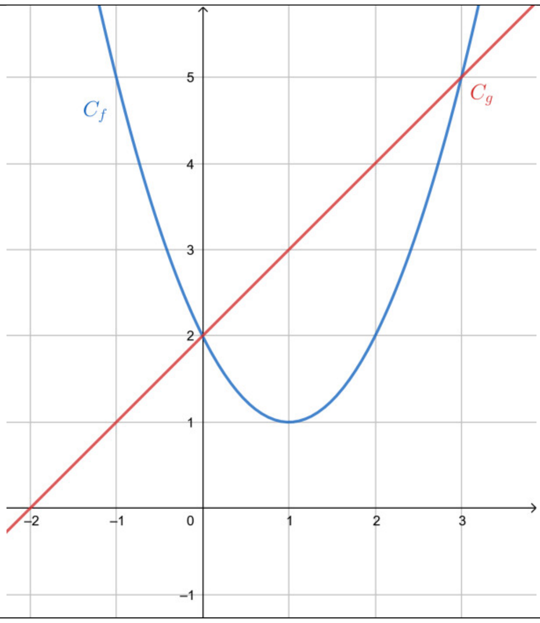
Let f and g be functions that are defined as follows:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \qquad \text{and} \qquad g(x) = x + 2$$

and shown in the graph on the right.

a) **Explain** what $\displaystyle\int_0^3 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$ represents graphically (you can reproduce the graph on your answer sheet and show your answer on the graph).

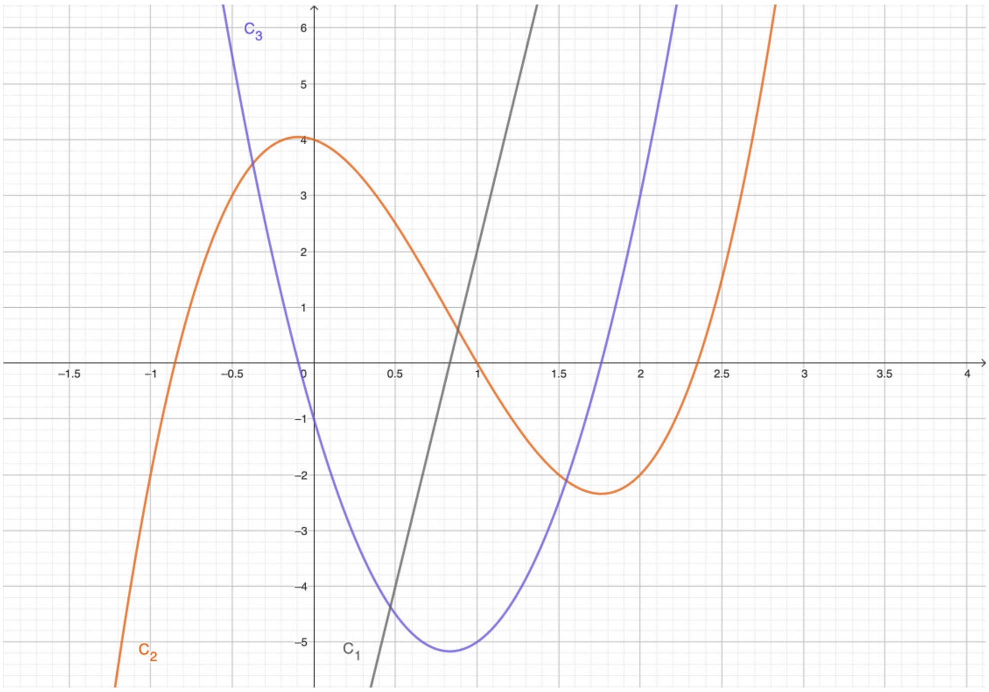
b) **Calculate** $\displaystyle\int_0^3 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.



5 marks

Exercise 19 Calc. : ✗

On donne les graphes d'une fonction f, de sa dérivée f', et de l'une de ses primitives F. Expliquer quel graphe correspond à quelle fonction.



5 marks

Exercise 20 Calc. : ✗

Un corps se déplace en ligne droite, entre $t = 0$ et $t = 6$ (en secondes), avec une vitesse $v(t) = 4t$ (en mètres par seconde).
La dérivée $v'(t)$ de la vitesse est l'accélération.
La position du corps le long de la ligne droite est modélisée par une primitive $V(t)$ de la vitesse.

a) Quelle est la vitesse initiale du corps ? Quelle vitesse atteint-il après 3 secondes ?

b) Calculer l'accélération en fonction du temps t.

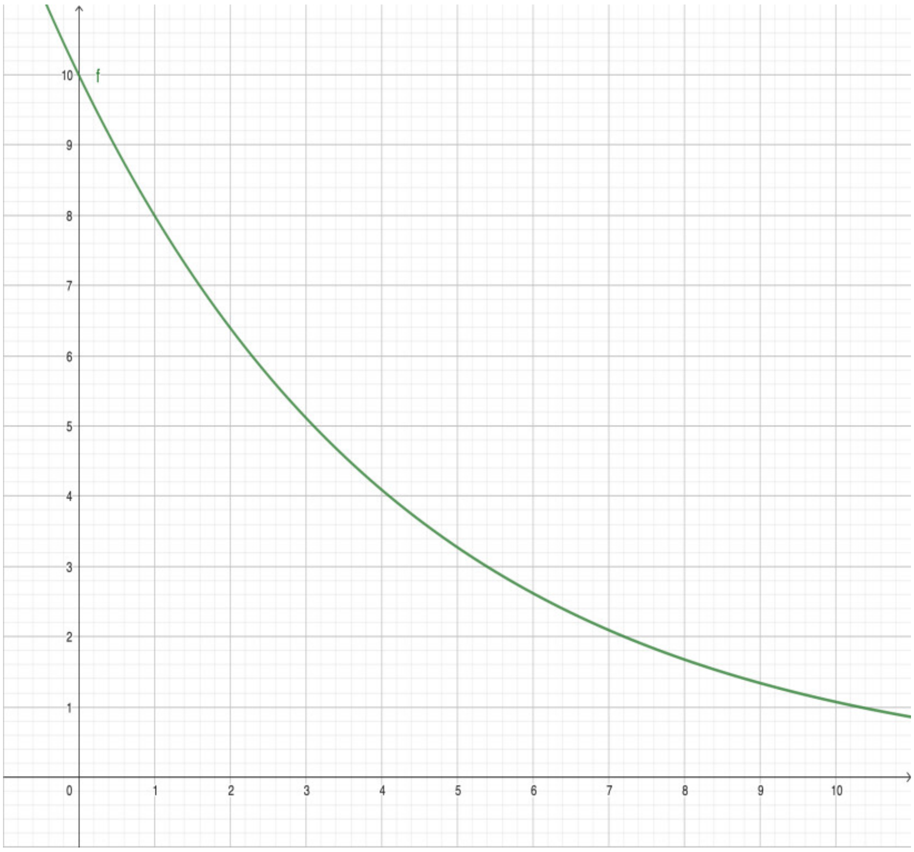
c) Calculer la primitive V de la fonction v pour laquelle $V(0) = 10$.

d) Quelle distance le corps a-t-il parcouru pendant les 6 premières secondes ?

5 marks

Exercise 21 Calc. : ✗

La fonction ci-dessous montre l'écoulement d'un liquide. La fonction de débit est notée f. $f(t)$ est le débit instantané à l'instant t (en minutes), en litres par minute.	5 marks



a) Ecrire une intégrale donnant l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses, pour $0 \leq t \leq 5$.

b) Estimer cette aire avec la méthode des rectangles. On considérera des rectangles dont la base mesure 1 min. Donner une sous-estimation et une sur-estimation.

c) A quoi correspond l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses, pour $0 \leq t \leq 5$?

d) Le liquide s'écoule dans un bidon de 25 litres. Le bidon sera-t-il complètement rempli au bout de 5 minutes ?

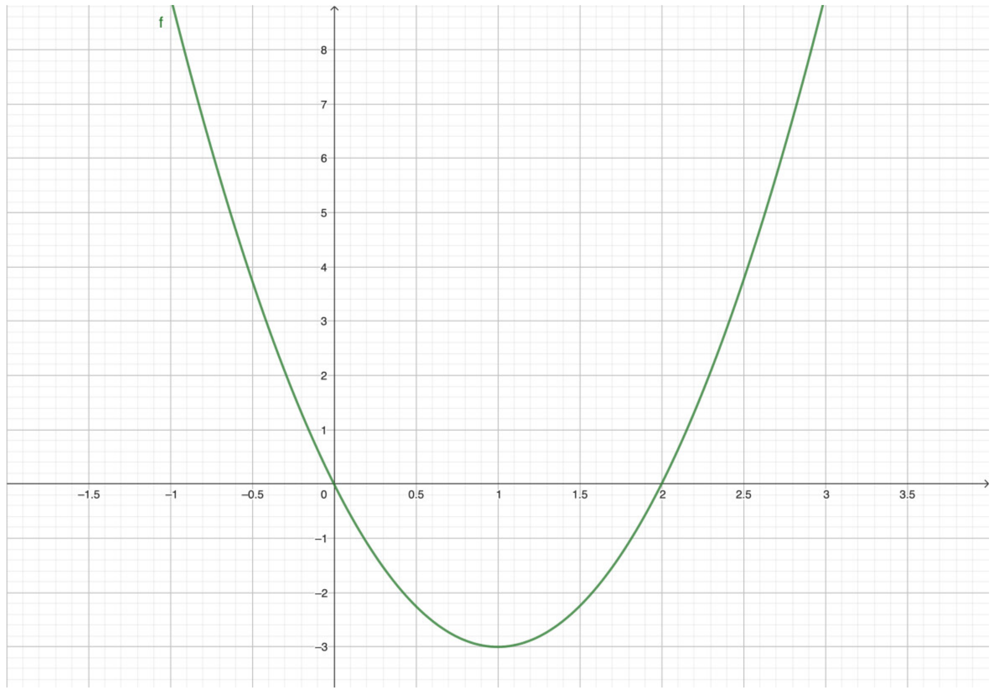
Exercise 22 Calc. : ✗

5 marks

On donne le graphe de la fonction $f(x) = 3x^2 - 6x$.

a) Calculer une primitive de la fonction f.

b) Calculer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses, pour $0 \leq x \leq 3$.



Exercise 23 Calc. : ✗

5 marks

a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 4e^{5x}\ dx$.

b) Calculer la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = -3x^2 + x + 7$ pour laquelle $F(0) = 5$.

Exercise 24 Calc. : ✗

5 marks

On donne les trois intégrales suivantes

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 12 \qquad J = \int_{2}^{5} f(x)\,dx = 3 \qquad K = \int_{5}^{-2} g(x)\,dx = 14$$

a) Faire un schéma des graphes de f et de g en respectant les conditions imposées par les intégrales.

b) Calculer les trois intégrales suivantes en utilisant les intégrales I, J et K.

$$A = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx \qquad B = \int_{-2}^{5} (f(x) - g(x))\,dx \qquad C = \int_{-2}^{5} 5f(x)\,dx$$

Exercise 25 Calc. : ✗

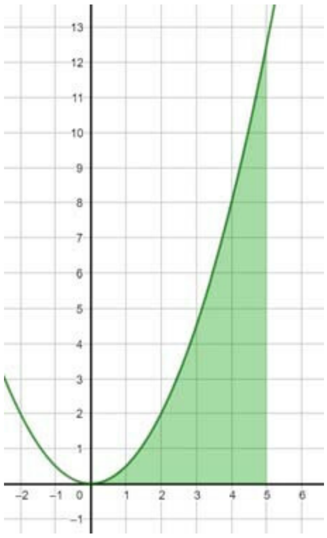
On sait que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + 2x$ est une primitive de la fonction f et que $\displaystyle\int_1^a f(x)\,dx = 5$, où a est un nombre réel positif.

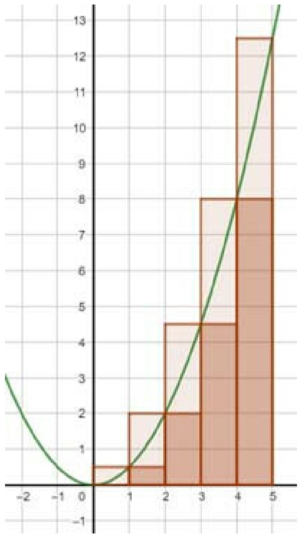
Déterminer a.

5 marks

Exercise 26 Calc. : ✗

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{2}$.
On cherche à déterminer l'aire A de la surface délimitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$. (voir diagramme ci-dessous à gauche)





a) À l'aide des rectangles représentés (voir diagramme ci-dessus à droite), **déterminer** un encadrement de l'aire A recherchée. 2 marks

b) **Expliquer** comment obtenir un encadrement plus fin avec cette technique. 1 mark

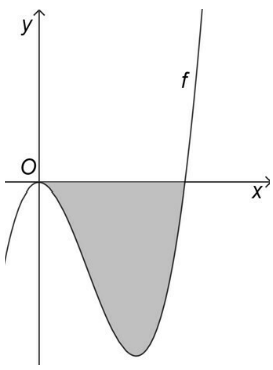
c) **Montrer** que la fonction F définie par $F(x) = \frac{x^3}{6}$ est une primitive de la fonction f et calculer la valeur exacte de l'aire A. 1 mark

Exercise 27 Calc. : ✗

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = -2x^2 \cdot (2 - x)$$

Le diagramme ci-dessous montre le graphique de f.



Écrire une intégrale qui donne l'aire de la surface grisée.
(Il n'est pas nécessaire de calculer cette intégrale, il suffit de donner une expression appropriée). 5 marks

Exercise 28 Calc. : ✗

La vitesse d'un objet en mouvement est donnée par une fonction f.
Une primitive de f est donnée par la fonction F définie par

$$F(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t$$

où t est le temps exprimé en secondes et $F(t)$ est exprimé en mètres.

a) **Déterminer** une expression de la vitesse $f(t)$ en m/s. — 2 marks

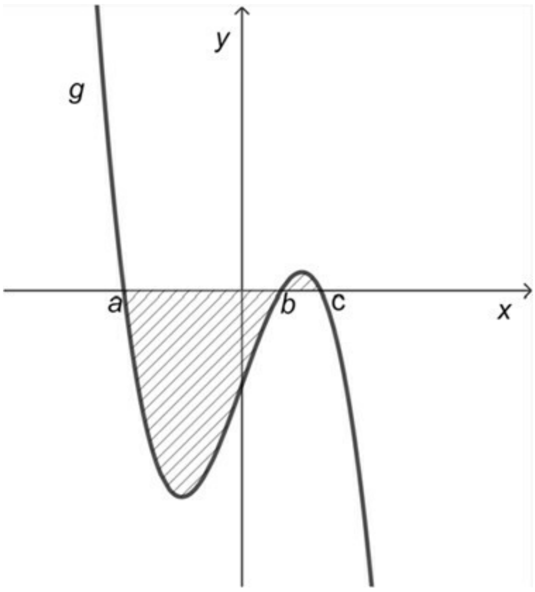
b) Le déplacement, en mètres, de l'objet en mouvement entre $t = a$ et $t = b$ est donné par

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Calculer le déplacement de l'objet en mouvement entre $t = 0$ et $t = 3$. — 3 marks

Exercise 29 Calc. : ✗

Le diagramme ci-dessous montre le graphique d'une fonction g.



Préciser pour chacune des expressions suivantes si elle représente l'aire de la surface hachurée. **Justifier** la réponse. — 5 marks

a) $\displaystyle\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c g(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\left|\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x\right|$

d) $\displaystyle-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c g(x)\,\mathrm{d}x$

Exercise 30 Calc. : ✗

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$.
On considère aussi la fonction F définie par $F(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x + d$, où a, b, c et d sont quatre nombres réels.

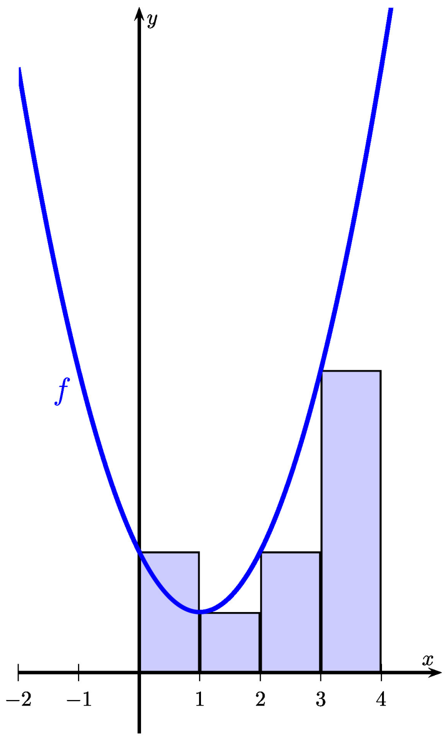
a) **Trouver** les valeurs des trois paramètres a, b, et c pour que $F' = f$. — 3 marks

b) **Trouver** la valeur du paramètre d pour que $F(1) = \dfrac{1}{12}$. — 2 marks

Exercise 31 Calc. : ✗

Voici la courbe de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$



a) **Trouver** une approximation de l'aire sous la courbe de $x = 0$ à $x = 4$ en utilisant des rectangles à gauche de largeur 1. — 3 marks

b) En se basant sur la courbe, **discuter** si cette approximation est une sur-estimation de $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, ou une sous-estimation. **Justifier** votre réponse. — 2 marks

Exercise 32 Calc. : ✗

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

On rappelle que la fonction F définie par $F(x) = \ln(x)$ est une primitive de f.

Calculer l'aire sous la courbe de f de $x = 1$ à $x = \mathrm{e}$. — 5 marks