Exercice 1 (16 points)

On donne les points $O(0\,;0)$, $A(-1\,;3)$, $B(5\,;-2)$, $C(8\,;6)$ et $M(x,y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$; où $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(-9\,;-10)$.

1. On peut écrire $M = A + \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-9\\-10\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-10\\-7\end{pmatrix}}$.

   On peut également partir de $\begin{pmatrix}x_M - x_A\\y_M - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-10\end{pmatrix}$, ce qui donne la même chose.

2. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}}$ et $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix}x_M - x_B\\y_M - y_B\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-15\\-5\end{pmatrix}}$.

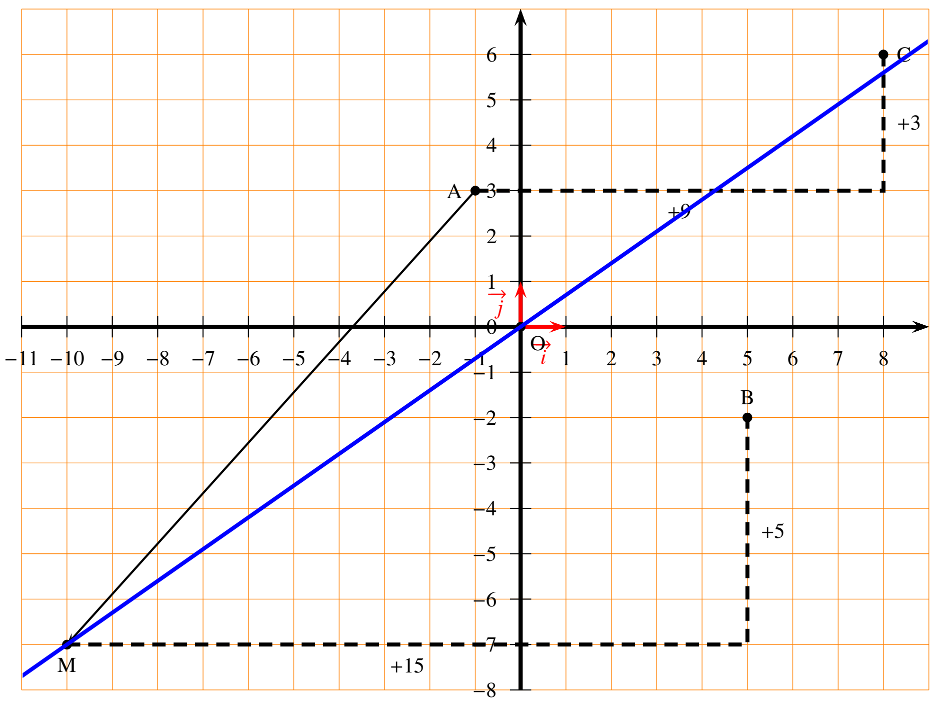
3. On peut utiliser le faut que $(AC)\ /\!/\ (BM) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires. On peut le vérifier directement ($k \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$) ou vérifier que le produit en croix de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM}$ est respecté, c'est-à-dire que le déterminant de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BM}$ est nul.

   Ici : $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix}-15\\-5\end{pmatrix}$. On peut calculer le déterminant $9 \times (-5) - 3 \times (-15) = -45 + 45 = 0$. Ainsi c'est $\boxed{\text{vrai}}$, les droites (AC) et (BM) sont parallèles.

4. On peut utiliser le faut que O, M et C sont alignés lorsque les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires. On peut le vérifier directement ($k \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}$) ou vérifier que le produit en croix de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OC}$ est respecté, c'est-à-dire que le déterminant de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OC}$ est nul.

   Ici : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}-10\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$. On peut calculer le déterminant $(-10)\times 6 - (-7)\times 8 = -60+56 = -4 \neq 0$. Ainsi c'est $\boxed{\text{faux}}$, les points O, M et C ne sont pas alignés.

5. Les points ont été placés. On lit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ (question 1). On lit les coordonnées des vecteurs (question 2) sur les pointillés. On en déduit que les droites sont parallèles (question 3) parce que le coefficient directeur de $(AC) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ est égal au coefficient directeur de $(MB) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. On voit que $C \notin (OM)$ (question 4) grâce à la droite bleue.



Exercice 2 (4 points)

On donne $D(3\,;-1)$; $E(1\,;3)$; $F(0\,;-2)$ et $G(6\,;1)$. On peut utiliser le fait que $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{FG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$.

Ici : $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} x_G - x_F \\ y_G - y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{FG} = (-2) \times 6 + 4 \times 3 = -12 + 12 = 0$.
Ainsi les vecteurs sont bien orthogonaux.

Exercice 3 (5 points)

Résolvons en détaillant :

$$\begin{aligned}
f(x) &\geq g(x) && \text{On remplace} \\
0,1x + 28,4 &\geq 2,4x - 12,5 && -0,1x \\
28,4 &\geq 2,3x - 12,5 && +12,5 \\
40,9 &\geq 2,3x && \div 2,3 \\
\frac{40,9}{2,3} &\geq x && \text{Intervalle} \\
\boxed{x \in \left]-\infty; \frac{40,9}{2,3}\right]}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (7 points)

On connaît $D = \dfrac{4V^2}{1000K}$, il suffit donc de transformer cette expression.

1. Exprimer K en fonction des autres, c'est isoler K :

$$\begin{aligned}
D &= \frac{4V^2}{1000K} && \times K \\
KD &= \frac{4V^2}{1000} && \div D \\
K &= \boxed{\frac{4V^2}{1000D}}
\end{aligned}$$

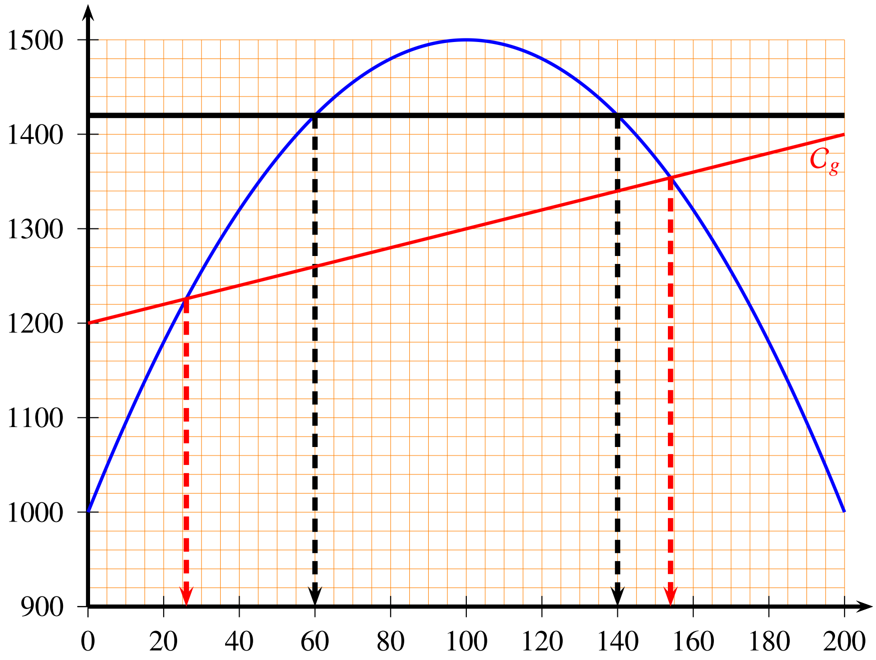
2. Exprimer V en fonction des autres, c'est isoler V :

$$\begin{aligned}
D &= \frac{4V^2}{1000K} && \times 1000K \\
1000KD &= 4V^2 && \div 4 \\
250KD &= V^2 && \text{Racine carrée (car } V > 0) \\
\boxed{\sqrt{250KD}} &= V
\end{aligned}$$

3. Il n'y a manifestement pas proportionnalité puisque la proportionnalité ça serait $D = aV$ et là on a $D = aV^2$.

Exercice 5 (15 points)

1. $\boxed{\mathcal{S} = \{\,60; 140\}}$ (cf. les tracés en noir).
2. Cf. la droite rouge.
3. $\boxed{\mathcal{S} = [0; 26[\; \cup\;]154; 200]}$ (cf. le tracé en rouge pointillé).
4. On vérifie à la calculatrice que $f(60) = f(140) = 1420$.
5. On calcule $f(30) = -0,05 \times 30^2 + 10 \times 30 + 1000 = \boxed{1255}$.



Exercice 6 (8 points)

1. Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{3+3+3+4+5+6+8+8}{8} = \boxed{5}$.

   Écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{\frac{(3-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2+(8-5)^2}{8}} = \sqrt{\frac{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(3)^2+(3)^2}{8}} = \sqrt{\frac{4+4+4+1+0+1+9+9}{8}} = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

   Lors de cette première journée, la moyenne des masses des caisses était de $\boxed{5 \text{ kg}}$ et leur écart-type était de $\boxed{2 \text{ kg}}$.

2. Lorsqu'on ajoute $0,5$ à toutes les valeurs d'une série, la moyenne augmente de $0,5$ et l'écart-type ne change pas. Ainsi, lors de cette deuxième journée et après le rajout de cet article, la moyenne des masses des caisses était de $\boxed{4,5}$ et leur écart-type était de $\boxed{1,5}$.

Exercice 7 (11 points)

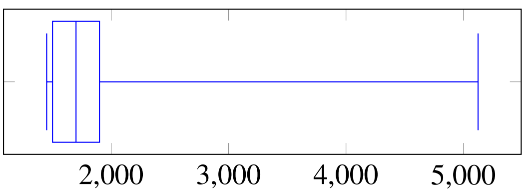
Afin de répondre aux questions, on peut commencer par calculer les effectifs cumulés :

Salaires (en €)	1 450	1 500	1 900	5 125
Effectifs	12	13	23	2
Effectifs cum.	12	25	48	50

1. L'effectif total de la série est $\boxed{50}$.

2.
   - Médiane : il s'agit de la demi-somme des valeurs de rangs est $\dfrac{50}{2} = 25$ et $\dfrac{50}{2} + 1 = 26$. La 25e valeur est 1 500, la 26e valeur est 1 900, la demi-somme vaut donc $\dfrac{1\,500 + 1\,900}{2} = \boxed{1\,700}$.
   - Q1 : $\dfrac{50}{4} = 12,5$ donc c'est la 13e valeur. C'est $\boxed{1\,500}$.
   - Q3 : $\dfrac{50 \times 3}{4} = 37,5$ donc c'est la 38e valeur. C'est $\boxed{1\,900}$.
   - Écart interquartile : Q3-Q1 $= 1\,900 - 1\,500 = \boxed{400}$.

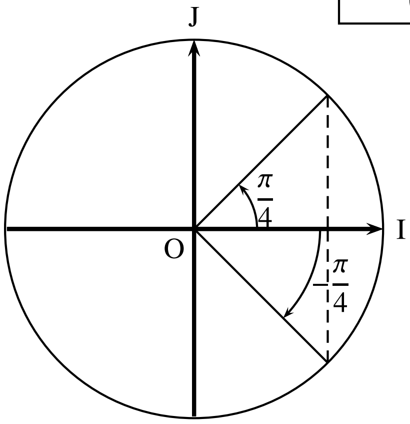
3. La boîte à moustaches est donc la suivante :



4. Si on change le salaire d'une des deux personnes centrales, ça modifiera le calcul de la médiane. Par ex. on peut augmenter l'une des personnes gagnant 1 500€ de 100€.

Exercice 8 (4 points)

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a deux solutions dans un tour complet : $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = -\dfrac{\pi}{4}$. Donc, dans $[0; 2\pi[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$.



2. $\sin(x) = -1$ a une solution dans un tour complet : $x = -\dfrac{\pi}{2}$. Donc, dans $[0; 2\pi[$, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}}$.