**Exercice A1** **6 points**

| | |
|---|---|
| 1. Si $a = \log 8 + \log 5 - 2\log\sqrt{4}$, $b = 3^{\frac{1}{2}\log_3(2)}$ et $c = \log_3(27)$, **justifier** que $a < b < c$. **Détailler** clairement le raisonnement. | 3 points |
| 2. **Résoudre** les équations suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ :<br>(a) $\left(3^{x-1}\right)^2 = 3^{x-5}$ ;<br>(b) $4^{x-2} = 8^x$. | 3 points |

1. Essayons de simplifier les expressions :
   - $a = \log 8 + \log 5 - 2\log\sqrt{4} = \log(8\times 5) - \log\left(\sqrt{4}^2\right) = \log(40) - \log 4 = \log\left(\frac{40}{4}\right) = \log 10 = 1$
   - $b = 3^{\frac{1}{2}\log_3(2)} = \left(3^{\log_3(2)}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,4$
   - $c = \log_3(27) = \log_3\left(3^3\right) = 3$

   On a bien justifié que $a < b < c$.

2. Pour résoudre $\left(3^{x-1}\right)^2 = 3^{x-5}$, on peut réécrire le terme de gauche $\left(3^{x-1}\right)^2 = 3^{2(x-1)}$, donc on peut réécrire l'équation :

$$\begin{aligned}
3^{2(x-1)} &= 3^{x-5} & &\text{Exposants égaux}\\
2(x-1) &= x-5 & &\text{Développement}\\
2x-2 &= x-5 & &-x\\
x-2 &= -5 & &+2\\
x &= -3
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \{-3\}}$.

3. Pour résoudre $4^{x-2} = 8^x$, on écrit de même les deux côtés comme puissance d'un même nombre. Ici, on reconnaît que $4 = 2^2$ et $8 = 2^3$. Donc $4^{x-2} = \left(2^2\right)^{x-2} = 2^{2(x-2)} = 2^{2x-4}$ et $8^x = \left(2^3\right)^x = 2^{3x}$. On peut donc écrire :

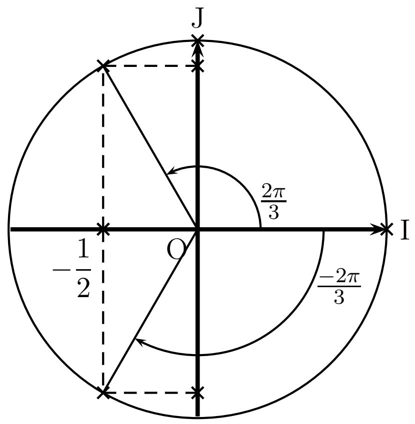
$$\begin{aligned}
2^{2x-4} &= 2^{3x} & &\text{Exposants égaux}\\
2x-4 &= 3x & &-2x\\
-4 &= x
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \{-4\}}$.

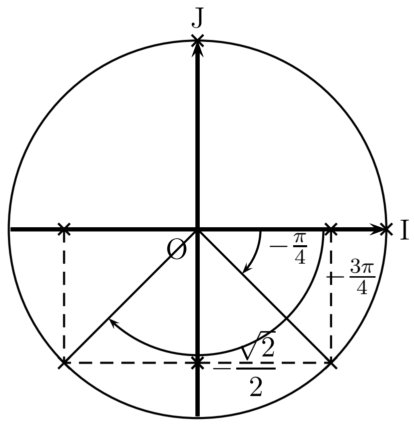
**Exercice A2** **7 points**

| | |
|---|---|
| 1. **Résoudre** l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, pour $x \in \mathbb{R}$. | 2 points |
| 2. **Résoudre** l'équation $\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, pour $x \in [0; 2\pi]$. | 2 points |
| 3. **Résoudre** l'équation $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, pour $x \in [0; 2\pi]$. | 3 points |

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$, est une valeur remarquable :




$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est aussi une valeur remarquable :




1. Donc, les solutions sont $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

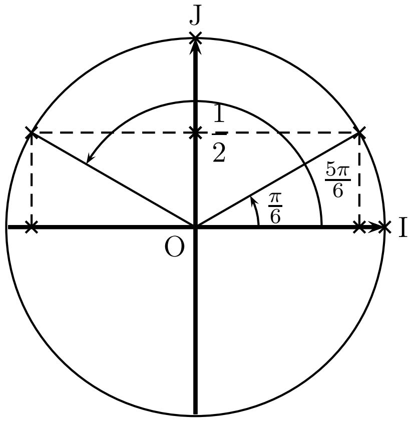
2. Ici, l'angle $x - \dfrac{\pi}{5}$ vaut donc, à $2\pi$ près, $-\dfrac{\pi}{4}$ ou $-\dfrac{3\pi}{4}$. Du coup, on a soit $x - \dfrac{\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ce qui donne $x = \dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{4\pi}{20} - \dfrac{5\pi}{20} + 2k\pi = -\dfrac{\pi}{20} + 2k\pi$, soit $x - \dfrac{\pi}{5} = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ce qui donne $x = \dfrac{\pi}{5} - \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{4\pi}{20} - \dfrac{15\pi}{20} + 2k\pi = -\dfrac{11\pi}{20} + 2k\pi$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{29\pi}{20} ; \dfrac{39\pi}{20}\right\}}$.

3. Pour résoudre une équation de ce type, la méthode à connaître est de faire le changement de variable $X = \sin(x)$ pour aboutir à une équation du 2nd degré.

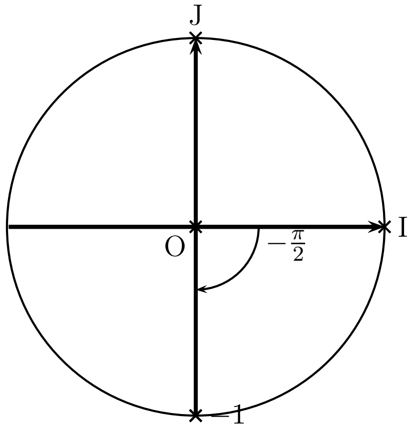
$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\ 2X^2 + X - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{On pose } X = \sin(x)$$

Ici on peut calculer le discriminant : les coefficients sont $a = 2$, $b = 1$ et $c = -1$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$. Donc on a deux solutions $X_{\pm} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2 \times 2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}$ et $-1$.

Maintenant qu'on a trouvé les solutions avec la variable $X = \sin(x)$, il faut trouver les solutions avec la variable $x$. On est donc ramenés à deux équations : $X = \dfrac{1}{2}$ demande de résoudre $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ (à gauche) et $X = -1$ demande de résoudre $\sin(x) = -1$ (à droite).




Ici, il y a deux solutions dans $[0 ; 2\pi]$ : $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.




Ici, il y a une solution dans $[0 ; 2\pi]$ : $\dfrac{3\pi}{2}$.

Au final, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{3\pi}{2}\right\}}$.

**Exercice A3** **6 points**

Un groupe hospitalier possède deux maisons de retraite nommées « Mouette » et « Rossignol ».

Ces deux maisons comptent 120 résidents au total dont 80 à la résidence « Mouette ».

Les soignants de ce groupe hospitalier évaluent la capacité des résidents à s'habiller en autonomie suivant une grille à trois niveaux A, B et C.

45 résidents de la maison « Mouette » sont évalués au niveau A ;
50 % des résidents de la maison « Rossignol » sont évalués au niveau B ;
20 résidents au total sont évalués au niveau C, dont la moitié réside à la maison « Mouette ».

On choisit au hasard un des résidents de ces maisons et on considère les évènements suivants :

M : « la personne est un résident de la maison Mouette » ;
A : « la personne est évaluée au niveau A » ;
B : « la personne est évaluée au niveau B » ;
C : « la personne est évaluée au niveau C ».

1. **Compléter** le tableau suivant : 1 point

| | A | B | C | Total |
|---|---|---|---|---|
| « Mouette » | 45 | 25 | 10 | 80 |
| « Rossignol » | 10 | 20 | 10 | 40 |
| Total | 55 | 45 | 20 | 120 |

2. *Dans les questions suivantes, on répondra en donnant les résultats sous forme de fraction simplifiée.*
   (a) **Déterminer** la probabilité de l'évènement M et la probabilité de l'évènement C. — 1 point
   (b) **Décrire** par une phrase l'évènement $M \cap A$ et **calculer** la probabilité de cet évènement. — 1.5 point
   (c) **Calculer** la probabilité que la personne choisie au hasard réside dans la maison « Mouette » sachant qu'elle a été évaluée au niveau A. — 1 point
   (d) **Calculer** la probabilité $P_{\overline{M}}(C)$. **Interpréter** cette probabilité dans le contexte de l'exercice. — 1.5 point

1. On a complété le tableau en rouge.
2. (a) Pour $P(M)$, on lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif(M)}}{\text{effectif total}} = \dfrac{80}{120} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

   Pour $P(C)$, on lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif(C)}}{\text{effectif total}} = \dfrac{20}{120} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

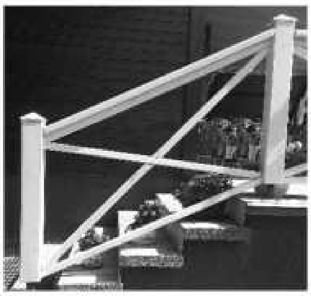
   (b) L'évènement $M \cap A$ est l'évènement « la personne est un résident de la maison Mouette évalué au niveau A ». Pour calculer $P(M \cap A)$. On lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif}(M \cap A)}{\text{effectif total}} = \dfrac{45}{120} = \boxed{\dfrac{3}{8}}$.

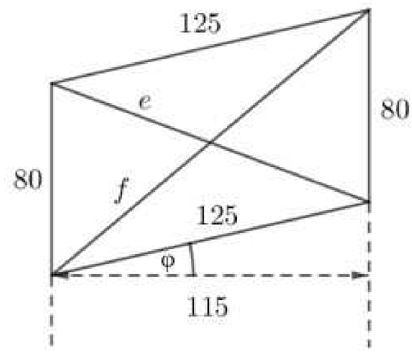
   (c) Ici on demande $P_A(M)$. On lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif}(A \cap M)}{\text{effectif(A)}} = \dfrac{45}{55} = \boxed{\dfrac{9}{11}}$.

   (d) Pour $P_{\overline{M}}(C)$, on lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif}(\overline{M} \cap C)}{\text{effectif}(\overline{M})} = \dfrac{10}{40} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$. Ainsi, la probabilité qu'une personne au hasard soit évaluée au niveau C sachant qu'elle réside dans la maison « Rossignol » est de $0,25$.

**Exercice B1** **6 points**

Sur la vue latérale ci-dessous, la rampe représentée a une forme de parallélogramme. Les côtés verticaux mesurent 80 cm, ils sont séparés de 115 cm. La longueur des deux autres côtés est 125 cm. (Nous utilisons la notation de la figure.)






1. L'angle $\phi$ est l'angle formé par l'horizontale et le côté inférieur du parallélogramme. **Prouver** avec un calcul que $\phi = 23°$ (arrondi au degré entier près). — 1.5 point
2. **Calculer** la longueur de la diagonale $e$ du parallélogramme. — 2 points
3. On installe un brise-vent en roseau sur la rampe. **Calculer** l'aire du brise-vent en roseau couvrant la partie en forme de parallélogramme. **Discuter** si l'aire du brise-vent en roseau installé est inférieure à 1 m$^2$. — 2.5 points

1. L'angle $\phi$ est dans un triangle rectangle avec un côté adjacent de 115 cm et une hypoténuse de 125 cm. On peut donc appliquer la trigonométrie, il vient que :
   $\cos\phi = \dfrac{115}{125} = 0,92$ donc $\phi = \arccos(0,92) \approx 23°$.
2. Pour calculer la distance $e$, on peut se placer dans le triangle de côtés 80, 125 et $e$, où on connaît un angle, l'angle entre les côtés de longueur 80 et 125 (c'est $90° - \phi \approx 67°$). Dans ce triangle, on utilise le théorème d'al-Kashi :

$$\begin{aligned} e^2 &= 80^2 + 125^2 - 2 \times 80 \times 125 \cos(90° - \arccos(0,92)) && \text{On calcule} \\ e^2 &= 22\ 025 - 20\ 000 \cos(90° - \arccos(0,92)) && \text{Valeur approchée} \\ e^2 &\approx 14\ 186,63282 && \text{On résout (une longueur est positive)} \\ e &\approx 119,1076522 \end{aligned}$$

En arrondissant à 1 cm près, $\boxed{e \approx 119 \text{ cm}}$. On pourra noter qu'en utilisant $\phi \approx 23°$ dans le calcul au lieu de la valeur exacte $\arccos(0,92)$, l'erreur commise à la fin est minime (on trouve $e \approx 119,2072877$), mais on ne pouvait pas savoir à l'avance cela, et c'était mieux de conserver les valeurs exactes le plus longtemps possible.

3. L'aire du parallélogramme est le double de l'aire du triangle dans lequel on vient de travailler. La formule nous donne que l'aire de ce triangle, exprimée en $\text{cm}^2$, est $\frac{1}{2} \times 80 \times 125 \times \sin(90° - \arccos(0,92))$, du coup l'aire totale du parallélogramme est $80 \times 125 \times \sin(90° - \arccos(0,92)) = 9\ 200$. Nous pouvons noter la beauté d'avoir tapé la formule exacte dans la calculatrice, ce qui nous donne, pour ce résultat en particulier, un résultat exact : l'aire du parallélogramme est de $\boxed{9\ 200 \text{ cm}^2, \text{ soit } 0,92 \text{ m}^2}$.
   On peut imaginer que l'aire totale du brise-vent sera plus grande : on voit sur l'image que la rampe est sur 3 marches entières et 2 demi-marches, soit 4 marches au total. Si les roseaux doivent couvrir l'intégralité du parallélogramme, doivent reposer sur les marches, et sont tous de la même hauteur, alors le raisonnement est le suivant : l'angle $\phi = 23°$ indique que le dénivelé des 4 marches est de $125 \sin(\arccos(0,92)) \approx 49$ cm. Du coup, on peut estimer que les roseaux doivent mesurer au moins $80 + 49 \div 4 \approx 92$ de hauteur, et donc que le brise-vent est, sur chaque marche, assimilable à un rectangle de côtés $115 \div 4 = 28,75$ et 92, soit une aire de $2\ 652 \text{ cm}^2$. Multiplié par 4, on obtient $1,06 \text{ m}^2$, soit $\boxed{\text{plus qu'un m}^2}$. Si vous avez répondu que $0,92 \text{ m}^2$ est inférieur à $1 \text{ m}^2$, pourquoi pas, mais il faut expliquer qu'il faut à ce moment-là attacher les roseaux pour ne pas qu'ils glissent (je préfère croire qu'il est plus simple que les roseaux reposent sur les marches).

**Exercice B2** **8 points**

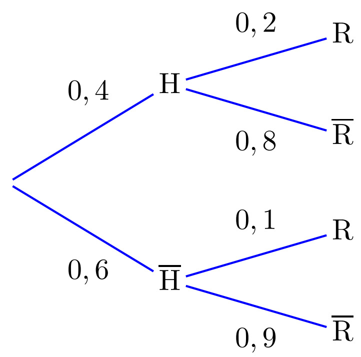
40% des patients d'un dentiste sont des hommes. L'agenda de ce dentiste montrent que 20% des hommes et 10% des femmes qui prennent rendez-vous ne viennent pas à ce rendez-vous.
Une personne prend rendez-vous.

1. **Déterminer** la probabilité :
   (a) que cette personne soit une femme présente au rendez-vous ; — 2 points
   (b) que cette personne vienne au rendez-vous ; — 2 points
   (c) que cette personne soit un homme sachant qu'elle ne vient pas au rendez-vous. — 2 points

53% des patients d'un autre cabinet dentaire ont strictement moins de 18 ans. Dans cet autre cabinet, 71% des patients sont porteurs de lunettes parmi lequel 47% ont 18 ans ou plus.
On choisit un patient au hasard dans cet autre cabinet et on considère les évènements suivants :
A : « Le patient a 18 ans ou plus »
L : « Le patient porte des lunettes »

2. **Déterminer** si les évènements A et L sont indépendants. **Justifier** votre réponse. — 2 points

1. Pour représenter la situation, on note H « la personne est un homme », R « la personne rate le rendez-vous », ce qui donne l'arbre pondéré ci-dessous :




   À partir de cet arbre, on peut calculer les probabilités :
   (a) on demande $P(\overline{\text{H}} \cap \overline{\text{R}}) = P(\overline{\text{H}}) \times P_{\overline{\text{H}}}(\overline{\text{R}}) = 0,6 \times 0,9 = \boxed{0,54}$ ;

(b) on demande $P(\overline{\mathrm{R}}) = P(\mathrm{H} \cap \overline{\mathrm{R}}) + P(\overline{\mathrm{H}} \cap \overline{\mathrm{R}}) = 0,4 \times 0,8 + 0,54 = \boxed{0,86}$ ;

(c) on demande $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{H}) = \dfrac{P(\mathrm{R} \cap \mathrm{H})}{P(\mathrm{R})} = \dfrac{0,4 \times 0,2}{1 - 0,86} \approx \boxed{0,571428571}$.

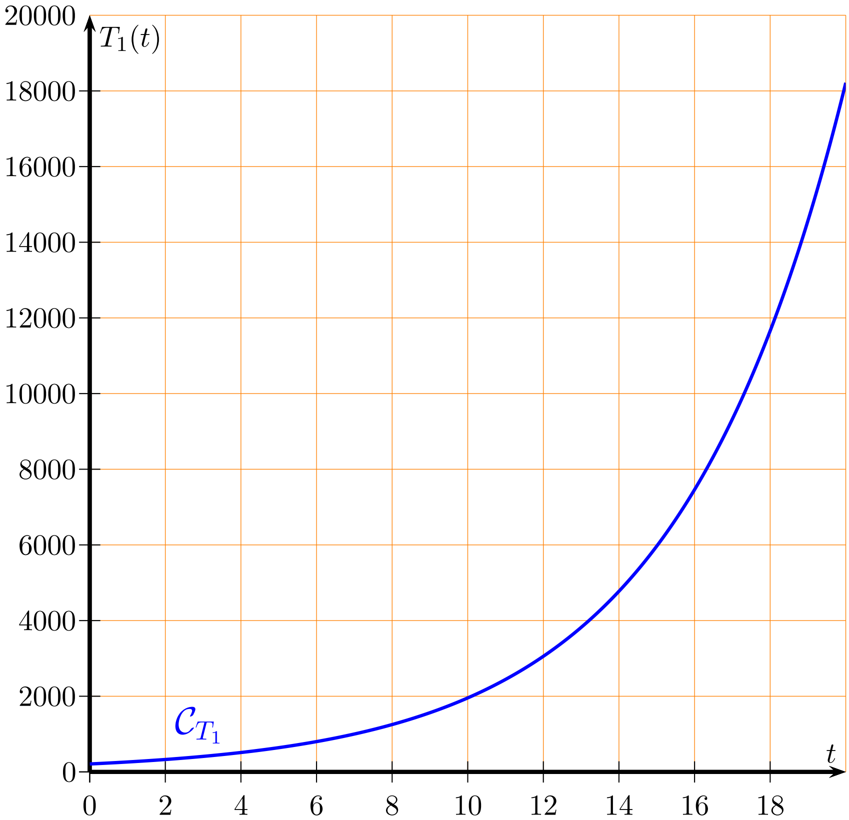
2. L'énoncé nous dit que 53% des patients d'un autre cabinet dentaire ont moins de 18 ans, donc $P(\mathrm{A}) = 100\% - 53\% = 47\%$.
   L'énoncé nous dit que 71% des patients sont porteurs de lunettes parmi lequel 47% ont 18 ans ou plus, donc $P_{\mathrm{L}}(\mathrm{A}) = 47\%$.
   Ces deux valeurs sont égales, ainsi le fait de savoir que L s'est réalisé ne change pas la probabilité de A, donc $\boxed{\text{A et L sont indépendants}}$.

**Exercice B3** **10.5 points**

| | |
|---|---|
| Sur le réseau social Twitter, on étudie le nombre de « j'aime » de trois « tweets » sur une certaine période. Au début de l'étude, le premier « tweet » a 210 « j'aime », puis, le nombre de ses « j'aime » augmente de 25% par heure. | |
| 1. **Expliquer** pourquoi l'augmentation est exponentielle et pourquoi elle peut être modélisée par la formule : $$T_1(t) = 210 \cdot 1,25^t$$ où $t$ est le nombre d'heures après le début de l'étude. | 1 point |
| 2. **Calculer** le nombre de « j'aime » que ce « tweet » avait 24 heures après le début de l'étude. | 1.5 point |
| 3. Sur le papier millimétré fourni, **tracer** le graphique de la fonction $T_1$ pour les 20 premières heures après le début de l'étude. | 1 point |
| 4. Selon le modèle, **calculer** le nombre d'heures qu'il a fallu à ce « tweet » pour atteindre 10 000 « j'aime ». | 3 points |
| Le nombre de « j'aime » du second « tweet », $t$ heures après le début de l'étude, est donné par la formule : $$T_2(t) = 1\ 240 \cdot 1,025^t$$ | |
| 5. **Déterminer** quand le premier « tweet » dépasse le second « tweet », en nombre de « j'aime ». | 2.5 points |
| Le troisième « tweet » avait 421 « j'aime » au début de l'étude, et son nombre de « j'aime » augmente de 8% par heure. | |
| 6. **Trouver** l'expression du nombre de « j'aime » pour ce troisième « tweet » en fonction de $t$, le nombre d'heures depuis le début de l'étude. | 1.5 point |

1. D'une heure à la suivante, le nombre de « j'aime » est multiplié par $1,25$ (25% d'augmentation correspond à un facteur multiplicatif de $1 + 25\% = 1,25$ ce qui fait donc une augmentation exponentielle). On démarre à 210 « j'aime », puis 1h après le début ce nombre a été multiplié par $1,25$, pour atteindre $210 \times 1,25$. Puis 2h après le début on a encore une multiplication par $1,25$ pour atteindre $210 \times 1,25 \times 1,25 = 210 \times 1,25^2 \ldots$, et donc au bout de $t$ heures, $\boxed{T_1(t) = 210 \times 1,25^t}$.
2. On remplace ici $t$ par 24 ce qui donne $T_1(24) = 210 \times 1,25^{24}$ soit $\boxed{\text{environ 44 469 « j'aime »}}$.
3. On va calculer une dizaine de valeurs (en utilisant la fonctionnalité table de valeurs de la calculatrice avec l'expression $210 \cdot 1,25^x$, début en 0, fin en 20, pas de 2), avant de tracer (j'ai pris 1 cm pour 2 heures en abscisses et 1 cm pour 2 000 « j'aime » en ordonnées) :

| $t$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_1(t)$ | 210 | 328 | 513 | 801 | 1 252 | 1 956 | 3 056 | 4 775 | 7 461 | 11 657 | 18 215 |




4. On veut résoudre $T_1(t) = 10\ 000$. Le tableau de valeurs plus haut nous indique que c'est une valeur entre 16 et 18 car $T_1(16) \approx 7\ 461 < 10\ 000$ et $T_1(18) \approx 11\ 657 > 10\ 000$. On calcule également $T_1(17) \approx 9\ 326 < 10\ 000$, donc c'est au bout de $\boxed{\text{18 heures}}$ qu'on a atteint 10 000 « j'aime ».

   On pouvait sinon résoudre à la main :

$$\begin{aligned}
210 \cdot 1,25^t &= 10\ 000 & & \\
1,25^t &= \frac{10\ 000}{210} & & \div 210 \\
1,25^t &= \frac{1\ 000}{21} & & \text{Simplification de la fraction} \\
t &= \boxed{\log_{1,25}\left(\frac{1\ 000}{21}\right)} & & \text{Utilisation du logarithme}
\end{aligned}$$

   Or $\log_{1,25}\left(\dfrac{1\ 000}{21}\right) \approx 17,31$, ce qui donne bien 18 heures également (la fonction étant croissante).

5. On nous demande ici de déterminer quand $T_1(t) > T_2(t)$. Cela va forcément arriver car $T_1$ démarre plus bas que $T_2$ mais a une base d'exponentielle plus grande. On peut de même regarder dans le tableau de valeurs, ou résoudre l'équation.

   Dans le tableau de valeurs (début 0, fin 20, pas de 1) on lit que $T_1(8) \approx 1\ 252$ et $T_2(8) \approx 1\ 511$ (plus grand) puis $T_1(9) \approx 1\ 565$ et $T_2(9) \approx 1\ 549$ (plus petit). C'est donc $\boxed{\text{au bout de 9 heures}}$. Sinon avec l'équation :

$$\begin{aligned}
210 \cdot 1,25^t &= 1\ 240 \cdot 1,025^t & & \\
1,25^t &= \frac{1\ 240}{210} \cdot 1,025^t & & \div 210 \\
\frac{1,25^t}{1,025^t} &= \frac{124}{21} & & \div 1,025^t \\
\left(\frac{1,25}{1,025}\right)^t &= \frac{124}{21} & & \text{Simplification} \\
t &= \boxed{\log_{\frac{1,25}{1,025}}\left(\frac{124}{21}\right)} & & \text{Utilisation du logarithme}
\end{aligned}$$

   Or $\log_{\frac{1,25}{1,025}}\left(\dfrac{124}{21}\right) \approx 8,95$, ce qui donne bien 9 heures également.

6. De la même manière que les deux autres expressions, on trouve $\boxed{T_3(t) = 421 \cdot 1,08^t}$.

**Exercice B4** **9.5 points**

| | |
|---|---|
| Soit $k$ un nombre réel. On considère les vecteurs :<br>$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\2k-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}k-1\\3\end{pmatrix}$. | |
| 1. **Trouver** la valeur du paramètre $k$, pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires. | 1.5 point |
| 2. **Trouver** la valeur du paramètre $k$, pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux. | 1.5 point |
| À partir de maintenant, on prend $k=5$. | |
| 3. **Trouver** la mesure de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. | 1.5 point |
| 4. **Exprimer** le vecteur $\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. | 2.5 points |
| 5. **Trouver** les coordonnées des sommets du parallélogramme ABCD, sachant que $A=(-2;1)$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{w}$. | 2.5 points |

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires quand leur déterminant est nul :
   $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\2k-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}k-1\\3\end{pmatrix}$, on résout donc :
   $$\begin{aligned}1\times 3-(2k-3)(k-1)&=0 && \text{On développe}\\ 3-(2k^2-2k-3k+3)&=0 && \text{On supprime la parenthèse}\\ 3-2k^2+5k-3&=0 && \text{On simplifie}\\ -2k^2+5k&=0 && \text{On factorise}\\ k(-2k+5)&=0\end{aligned}$$
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, la résolution donne donc $k=0$ ou $k=2,5$. $\boxed{\mathcal{S}=\{0;2,5\}}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux quand leur produit scalaire est nul :
   $$\begin{aligned}1\times(k-1)+(2k-3)\times 3&=0 && \text{On développe}\\ k-1+6k-9&=0 && \text{On simplifie}\\ 7k-10&=0 && +10\\ 7k&=10 && \div 7\\ k&=\frac{10}{7}\end{aligned}$$
   $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{10}{7}\right\}}$.
3. On a maintenant $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
   L'angle $\theta$ entre les deux vecteurs peut se trouver à l'aide du produit scalaire. Effectivement on a les deux formules $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=x_u\cdot x_v+y_u\cdot y_v$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot\cos(\theta)$.
   $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$, $\|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$, et $x_u\cdot x_v+y_u\cdot y_v=1\times 4+7\times 3=25$. Donc on obtient :
   $25=\sqrt{50}\times 5\times\cos(\theta)$ soit $\cos(\theta)=\dfrac{25}{5\sqrt{50}}=\dfrac{5}{\sqrt{50}}=\dfrac{5}{\sqrt{25\times 2}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ce qu'on reconnaît comme une valeur remarquable, c'est-à-dire $\boxed{\theta=45°}$.
4. On doit résoudre $\begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases}-10=a+4b\\5=7a+3b\end{cases}$
   Ici on peut procéder par substitution car la première ligne nous donne sans grande peine $a$ en fonction de $b$ :
   $$\begin{cases}-10-4b=a\\5=7(-10-4b)+3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10-4b=a\\5=-70-28b+3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10-4b=a\\75=-25b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10-4b=a\\-3=b\end{cases}\Leftrightarrow$$
   $\begin{cases}-10-4\times(-3)=a\\-3=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=a\\-3=b\end{cases}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}}$.
5. On donne $\boxed{A=(-2;1)}$, et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ donc $\begin{pmatrix}x_B-(-2)\\y_B-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{B(-1;8)}$.

On donne $A=(-2;1)$, et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$ donc $\begin{pmatrix} x_D-(-2) \\ y_D-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{D(-12;6)}$.

Enfin ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, du coup $B(-1;8)$ et $\overrightarrow{BC}=\vec{w}$ donc $\begin{pmatrix} x_C-(-1) \\ y_C-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\boxed{C(-11;13)}$.

**Exercice B5** **3 points**

| | |
|---|---|
| On considère un triangle ABC dont les points ont pour coordonnées : $A(0;0)$, $B(-2;4)$ et $C(4;5)$. | |
| 1. **Calculer** les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. | 1 point |
| 2. **Montrer que** l'angle au sommet B du triangle ABC vaut $72,9°$ arrondi au dixième près. | 1 point |
| 3. **Calculer** l'aire du triangle ABC. | 1 point |

1. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A-x_B \\ y_A-y_B \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}}$.
2. L'angle $\theta$ en B peut se trouver à l'aide du produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Effectivement on a les deux formules $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = ||\overrightarrow{BA}||\cdot||\overrightarrow{BC}||\cdot\cos(\theta)$.
$||\overrightarrow{BA}|| = \sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$, $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}$, et $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2 = 2\times 6+(-4)\times 1 = 8$. Donc :
$8=\sqrt{20}\times\sqrt{37}\times\cos(\theta)$ soit $\cos(\theta)=\dfrac{8}{\sqrt{740}}$, c'est-à-dire $\boxed{\theta = \arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{740}}\right)\approx 72,9°}$.
3. L'aire du triangle ABC peut maintenant se calculer par la formule $\dfrac{1}{2}\times BA\ \times BC\times\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{20}\times\sqrt{37}\times\sin\left(\arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{740}}\right)\right) = \boxed{13}$. D'où encore une fois l'intérêt de laisser les valeurs exactes dans le calcul pour éviter les erreurs d'arrondi (ici ça tombe juste).

**Exercice B6** **4 points**

| | |
|---|---|
| 1. **Résoudre** l'équation $\log_5 x+\log_5 3=\log_5 6$. | 1.5 point |
| 2. **Résoudre** l'équation $\log_2 x+\log_2(x-1)=2\log_2 x$. | 2.5 points |

1. Pour résoudre $\log_5 x+\log_5 3=\log_5 6$, on va commencer par réécrire plus simplement l'équation :
$$\begin{aligned} \log_5 x+\log_5 3 &= \log_5 6 && \text{$\log_b x+\log_b y=\log_b(x\times y)$} \\ \log_5(3x) &= \log_5 6 && \text{Composition avec $x\mapsto 5^x$} \\ 5^{\log_5(3x)} &= 5^{\log_5 6} && 5^{\log_5(y)}=y \\ 3x &= 6 && \div 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$
Maintenant, il faut vérifier le domaine de définition. $\log_5 x$ est défini quand $x>0$, et les deux autres termes de l'équation de base n'ont pas de $x$. On a bien $2>0$, ainsi $\boxed{\mathcal{S}=\{2\}}$.
2. Pour résoudre $\log_2 x+\log_2(x-1)=2\log_2 x$, on va commencer par réécrire plus simplement l'équation :
$$\begin{aligned} \log_2 x+\log_2(x-1) &= 2\log_2 x && \text{$\log_b x+\log_b y=\log_b(x\times y)$ et $a\log_b x=\log_b(x^a)$} \\ \log_2(x(x-1)) &= \log_2(x^2) && \text{Composition avec $x\mapsto 2^x$} \\ 2^{\log_2(x(x-1))} &= 2^{\log_2(x^2)} && 2^{\log_2(y)}=y \\ x(x-1) &= x^2 && \text{On développe} \\ x^2-x &= x^2 && -x^2 \\ -x &= 0 \end{aligned}$$
Maintenant, il faut vérifier le domaine de définition. $\log_2 x$ est défini quand $x>0$, $\log_2(x-1)$ est défini quand $x-1>0$ c'est-à-dire $x>1$ donc l'équation est définie pour $x>1$. Or 0 n'est pas dans ce domaine, ainsi $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$.