

Exercice 1 (16 points)

On donne les points $O(0 ; 0)$, $A(-1 ; 3)$, $B(5 ; -2)$, $C(8 ; 6)$ et $M(x, y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$; où \vec{u} a pour coordonnées $(-9 ; -10)$.

1. On peut écrire $M = A + \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -10 \\ -7 \end{pmatrix}}$.

On peut également partir de $\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \end{pmatrix}$, ce qui donne la même chose.

2. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}}$ et $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}}$.

3. On peut utiliser le fait que $(AC) \parallel (BM) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{BM} sont colinéaires. On peut le vérifier directement ($k \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$) ou vérifier que le produit en croix de \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BM} est respecté, c'est-à-dire que le déterminant de \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BM} est nul.

Ici : $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}$. On peut calculer le déterminant $9 \times (-5) - 3 \times (-15) = -45 + 45 = 0$.

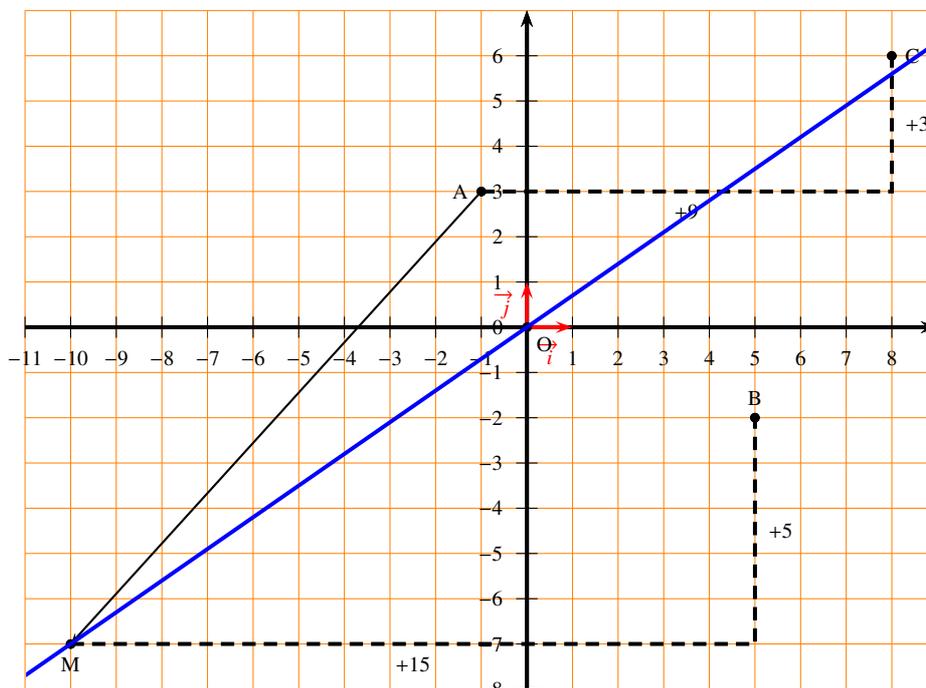
Ainsi c'est vrai, les droites (AC) et (BM) sont parallèles.

4. On peut utiliser le fait que O, M et C sont alignés lorsque les vecteurs \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{OC} sont colinéaires. On peut le vérifier directement ($k \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}$) ou vérifier que le produit en croix de \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{OC} est respecté, c'est-à-dire que le déterminant de \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{OC} est nul.

Ici : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. On peut calculer le déterminant $(-10) \times 6 - (-7) \times 8 = -60 + 56 = -4 \neq 0$.

Ainsi c'est faux, les points O, M et C ne sont pas alignés.

5. Les points ont été placés. On lit les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AM} (question 1). On lit les coordonnées des vecteurs (question 2) sur les pointillés. On en déduit que les droites sont parallèles (question 3) parce que le coefficient directeur de $(AC) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ est égal au coefficient directeur de $(MB) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. On voit que $C \notin (OM)$ (question 4) grâce à la droite bleue.



Exercice 2 (4 points)

On donne $D(3 ; -1) ; E(1 ; 3) ; F(0 ; -2)$ et $G(6 ; 1)$. On peut utiliser le fait que $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{FG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$.

Ici : $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} x_G - x_F \\ y_G - y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{FG} = (-2) \times 6 + 4 \times 3 = -12 + 12 = 0$.
Ainsi les vecteurs sont bien orthogonaux.

Exercice 3 (5 points)

Résolvons en détaillant :

$$\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ 0,1x + 28,4 \geq 2,4x - 12,5 \\ 28,4 \geq 2,3x - 12,5 \\ 40,9 \geq 2,3x \\ \frac{40,9}{2,3} \geq x \\ \boxed{x \in]-\infty; \frac{40,9}{2,3}]} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{On remplace} \\ \leftarrow -0,1x \\ \leftarrow +12,5 \\ \leftarrow \div 2,3 \\ \leftarrow \text{Intervalle} \end{array}$$

Exercice 4 (7 points)

On connaît $D = \frac{4V^2}{1000K}$, il suffit donc de transformer cette expression.

1. Exprimer K en fonction des autres, c'est isoler K :

$$\begin{array}{l} D = \frac{4V^2}{1000K} \\ KD = \frac{4V^2}{1000} \\ K = \boxed{\frac{4V^2}{1000D}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \times K \\ \leftarrow \div D \end{array}$$

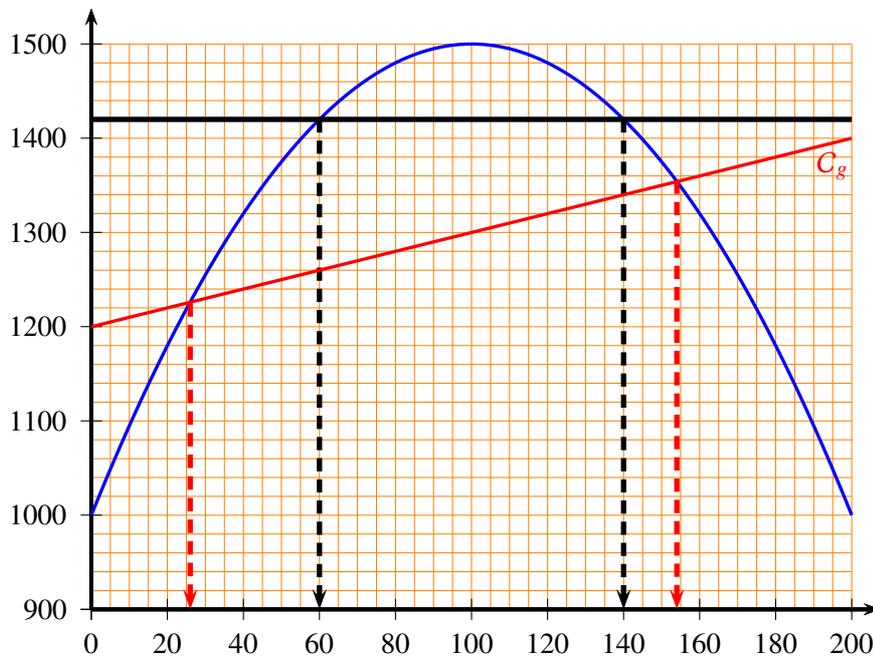
2. Exprimer V en fonction des autres, c'est isoler V :

$$\begin{array}{l} D = \frac{4V^2}{1000K} \\ 1000KD = 4V^2 \\ 250KD = V^2 \\ \boxed{\sqrt{250KD}} = V \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \times 1000K \\ \leftarrow \div 4 \\ \leftarrow \text{Racine carrée (car } V > 0) \end{array}$$

3. Il n'y a manifestement pas proportionnalité puisque la proportionnalité ça serait $D = aV$ et là on a $D = aV^2$.

Exercice 5 (15 points)

- $\boxed{S = \{60; 140\}}$ (cf. les tracés en noir).
- Cf. la droite rouge.
- $\boxed{S = [0; 26[\cup]154; 200]}$ (cf. le tracé en rouge pointillé).
- On vérifie à la calculatrice que $f(60) = f(140) = 1420$.
- On calcule $f(30) = -0,05 \times 30^2 + 10 \times 30 + 1000 = \boxed{1255}$.



Exercice 6 (8 points)

1. Moyenne : $\bar{x} = \frac{3 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 8}{8} = \boxed{5}$.

Écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{\frac{(3-5)^2 + (3-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2 + (8-5)^2}{8}} =$

$\sqrt{\frac{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (3)^2}{8}} = \sqrt{\frac{4+4+4+1+0+1+9+9}{8}} = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

Lors de cette première journée, la moyenne du poids des caisses était de $\boxed{5}$ et leur écart-type était de $\boxed{2}$.

2. Lorsqu'on ajoute 0,5 à toutes les valeurs d'une série, la moyenne augmente de 0,5 et l'écart-type ne change pas. Ainsi, lors de cette deuxième journée et après le rajout de cet article, la moyenne du poids des caisses était de $\boxed{4,5}$ et leur écart-type était de $\boxed{1,5}$.

Exercice 7 (11 points)

Afin de répondre aux questions, on peut commencer par calculer les effectifs cumulés :

| | | | | |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| Salaires (en €) | 1 450 | 1 500 | 1 900 | 5 125 |
| Effectifs | 12 | 13 | 23 | 2 |
| Effectifs cum. | 12 | 25 | 48 | 50 |

1. L'effectif total de la série est $\boxed{50}$.

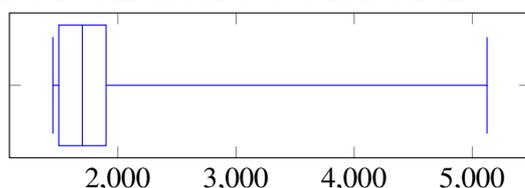
2. • Médiane : il s'agit de la demi-somme des valeurs de rangs est $\frac{50}{2} = 25$ et $\frac{50}{2} + 1 = 26$. La 25e valeur est 1 500, la 26e valeur est 1 900, la demi-somme vaut donc $\frac{1\,500 + 1\,900}{2} = \boxed{1\,700}$.

• Q1 : $\frac{50}{4} = 12,5$ donc c'est la 13e valeur. C'est $\boxed{1\,500}$.

• Q3 : $\frac{50 \times 3}{4} = 37,5$ donc c'est la 38e valeur. C'est $\boxed{1\,900}$.

• Écart interquartile : $Q3 - Q1 = 1\,900 - 1\,500 = \boxed{400}$.

3. La boîte à moustaches est donc la suivante :

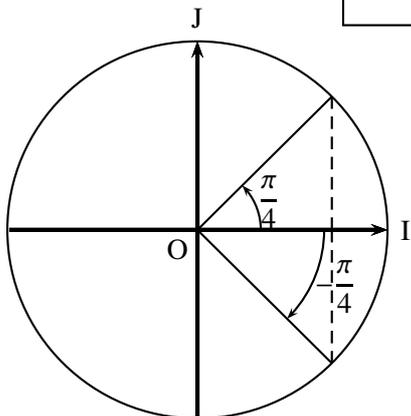


4. Si on change le salaire d'une des deux personnes centrales, ça modifiera le calcul de la médiane. Par ex. on peut augmenter l'une des personnes gagnant 1 500€ de 100€.

Exercice 8 (4 points)

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a deux solutions dans un tour complet : $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = -\frac{\pi}{4}$. Donc, dans $[0; 2\pi[$,

l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$.



2. $\sin(x) = -1$ a une solution dans un tour complet : $x = -\frac{\pi}{2}$. Donc, dans $[0; 2\pi[$, l'ensemble des

solutions est $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}$.

