Chapitre 2.
Angles et trigonométrie

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2020–2021

Plan du chapitre

- Le cercle trigonométrique
- Formules trigonométriques

Activité 1 p.198

- Quand on tourne sur un cercle, il y a plusieurs longueurs différentes qui arrivent au même point.
- Si le rayon du cercle est 1, alors il s'agit du cercle trigonométrique. . .

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1. Son périmètre est 2π (formule : périmètre $= 2\pi R$).

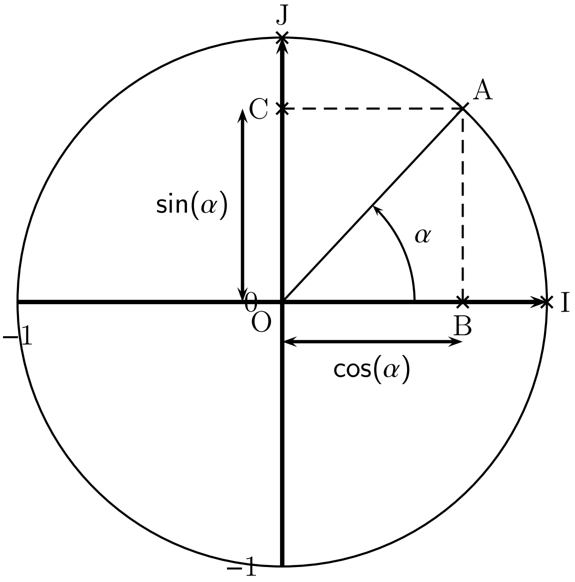
Pour se repérer sur le cercle, on définit un départ en $I(1;0)$ et on tourne dans le sens trigonométrique (le sens opposé des aiguilles d'une montre). On compte alors la longueur de l'arc de cercle parcouru. Remarque : on peut donc ajouter ou retrancher autant de fois que voulu la valeur 2π, ça ne change rien au repérage !

Si on nomme M le point sur lequel on s'arrête, on définit la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en radians comme étant la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$. On a donc le tableau de proportionnalité[1] :

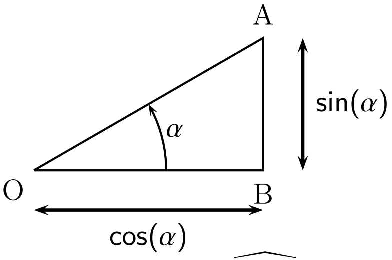
Degrés	0	360	30	45	60	90	180
Radians	0	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

1. Degrés/radians : https://www.youtube.com/watch?v=-fu9bSBKM00

Le premier quart de cercle



- Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
- Soit $A \in \mathcal{C}$ tel que $\widehat{IA} = \alpha$
- Soit $B \in (OI)$ tel que $(AB) \parallel (OJ)$
- Dans OAB rectangle en B, on a $OA = 1$, donc $\cos(\alpha) = OB$
- Soit $C \in (OJ)$ tel que $(AC) \parallel (OI)$
- Dans OAC rectangle en C, on a $OA = 1$, donc $\sin(\alpha) = OC$



Dans OAB rectangle en B, avec OA $= 1$ et $\alpha = \widehat{\text{BOA}}$:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Effectivement, cela provient tout simplement du théorème de Pythagore et de la définition des relations trigonométriques :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{OB}}{\text{OA}} = \text{OB}\,;\ \sin(\alpha) = \frac{\text{AB}}{\text{OA}} = \text{AB}\,;\ \text{OB}^2 + \text{AB}^2 = \text{OA}^2.$$

Valeurs remarquables

Les valeurs bleues se lisent directement sur le quart de cercle, les valeurs rouges se déduisent [2] de la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. Pour la valeur en $45° = \dfrac{\pi}{4}$ radians, la valeur vient du fait que le triangle est isocèle en plus d'être rectangle [3].

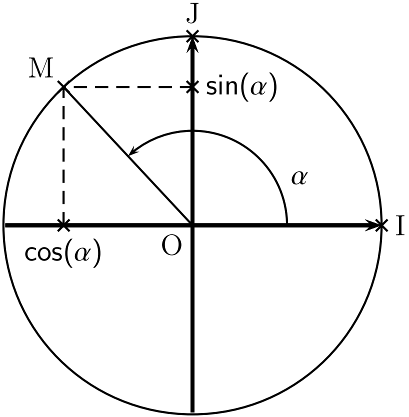
Degrés	0	30	45	60	90
Radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1

2. Pour $\frac{\pi}{3}$: https://www.youtube.com/watch?v=4R1i5Vj72Ls
3. Pour $\frac{\pi}{4}$: https://www.youtube.com/watch?v=b2-EQupZUp8

Extension au cercle entier

Par extension, on définit les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$ par : $(\cos(x), \sin(x))$ sont les coordonnées du point M du cercle trigonométrique associé au nombre x.

Remarque : ce ne sont donc plus forcément des nombres positifs ! Sur un dessin [4] :



4. Des exemples : https://www.youtube.com/watch?v=ECNX9hnhG9U

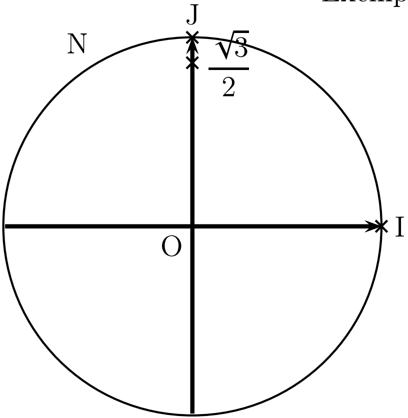
Angles associés [5] : p.203.

5. https://www.youtube.com/watch?v=m6tuif8ZpFY

Résolution d'équations

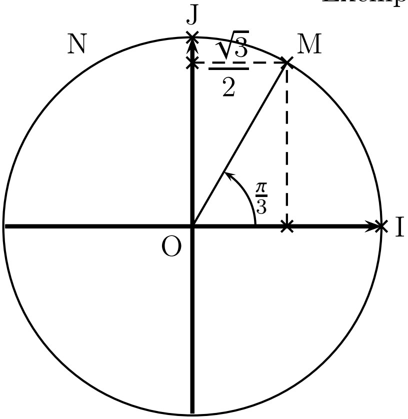
À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[6] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



6. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[6] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$



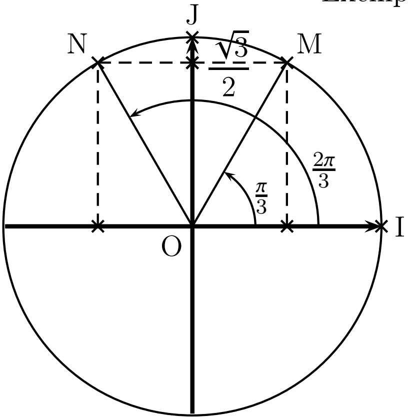
Exemple : résoudre $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- On reconnaît que $\dfrac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).

6. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[6] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

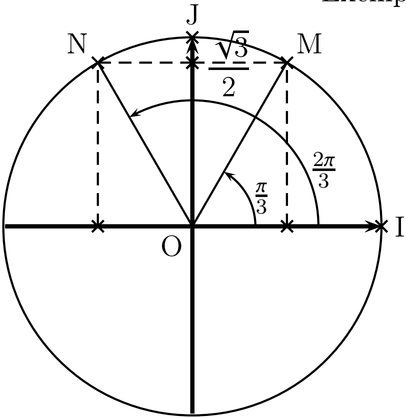


- On reconnaît que $\dfrac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\dfrac{2\pi}{3}$ est solution.

6. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

Résolution d'équations

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[6] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$



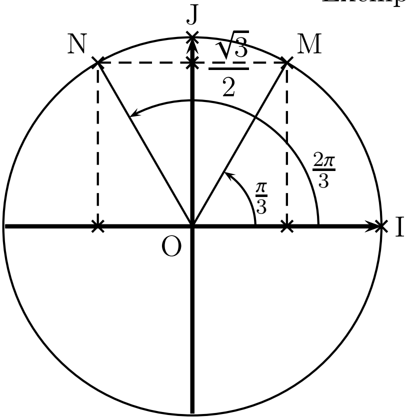
Exemple : résoudre $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On reconnaît que $\frac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\frac{2\pi}{3}$ est solution.
- Dans $[0; 2\pi[$, c'est terminé.

6. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

À l'aide des angles associés et des multiples valeurs associées à un point sur le cercle trigonométrique, on peut résoudre[6] des équations de type $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) = a$

Exemple : résoudre $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



- On reconnaît que $\dfrac{\pi}{3}$ est solution (grâce au tableau).
- Par angles associés, on sait également que $\dfrac{2\pi}{3}$ est solution.
- Dans $[0; 2\pi[$, c'est terminé.
- Dans un autre intervalle, on utilise des tours complets. Exemple : dans $[-2\pi; 0[$, les solutions sont $\dfrac{-4\pi}{3}$ et $\dfrac{-5\pi}{3}$

6. https://www.youtube.com/watch?v=VbfA7HGIeLw

Utilisation de la calculatrice

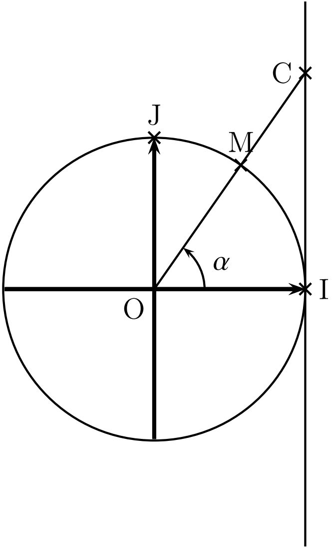
Résoudre des équations trigonométriques avec la calculatrice :

- Pour résoudre $\cos(x) = a$, on demande $\arccos(a)$.
  Effectivement, pour tout nombre $a \in [-1; 1]$,
  $\cos(\arccos(a)) = a$, donc $\arccos(a)$ est solution de l'équation.
  $\arccos$ ne donne que la solution dans $[0; \pi]$. Utiliser les angles associés ensuite !
- Pour résoudre $\sin(x) = a$, on demande $\arcsin(a)$.
  Effectivement, pour tout nombre $a \in [-1; 1]$,
  $\sin(\arcsin(a)) = a$, donc $\arcsin(a)$ est solution de l'équation.
  $\arcsin$ ne donne que la solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

La tangente

On rappelle que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle, c'est $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

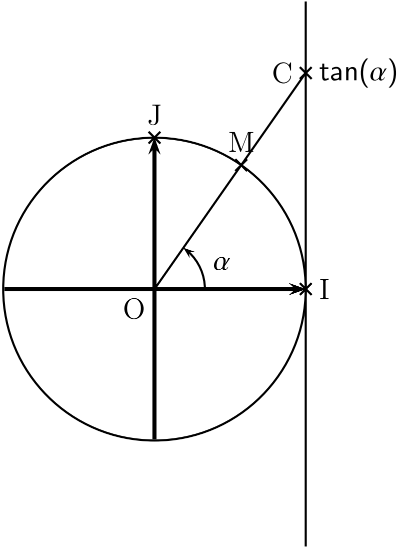
- Dans OIC rectangle en I,
  $\mathsf{tan}(\alpha) = \dfrac{\mathrm{IC}}{\mathrm{OI}}$, mais… $\mathrm{OI} = 1$!



La tangente

On rappelle que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle, c'est $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

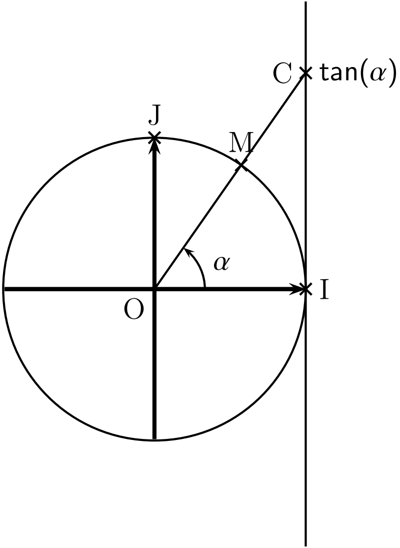
- Dans OIC rectangle en I, $\tan(\alpha) = \dfrac{IC}{OI}$, mais… $OI = 1$!
- Donc, $IC = \tan(\alpha)$.



La tangente

On rappelle que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle, c'est $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

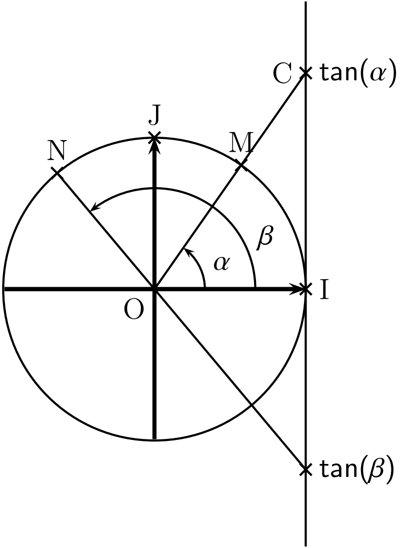
- Dans OIC rectangle en I, $\mathsf{tan}(\alpha) = \dfrac{\mathrm{IC}}{\mathrm{OI}}$, mais... $\mathrm{OI} = 1$!
- Donc, $\mathrm{IC} = \mathsf{tan}(\alpha)$.
- En $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$, pas de valeur.



La tangente

On rappelle que dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle, c'est $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

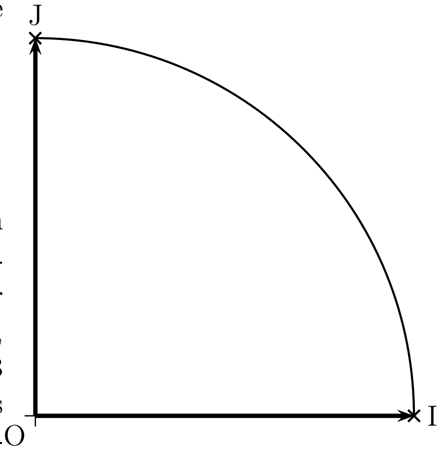
- Dans OIC rectangle en I, $\tan(\alpha) = \dfrac{IC}{OI}$, mais… $OI = 1$!
- Donc, $IC = \tan(\alpha)$.
- En $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$, pas de valeur.
- Entre $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$, il faut toujours lire la tangente sur cette droite, donc… de l'autre côté !



Formule $\cos(a - b)$ (1/3)

On considère deux angles a et b, et on construit les points A, B et C de la manière suivante :

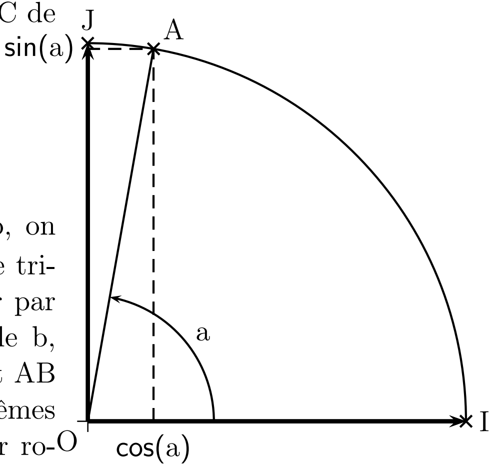
Puisque $\widehat{IOA} = a$ et $\widehat{IOB} = b$, on en déduit que $\widehat{BOA} = a - b$. Le triangle BOA peut donc s'obtenir par rotation du triangle IOC (angle b, centre O). Ainsi, les côtés IC et AB de ces deux triangles sont les mêmes (conservation des longueurs par rotation).



On considère deux angles a et b, et on construit les points A, B et C de la manière suivante :

- $\widehat{IOA} = a$

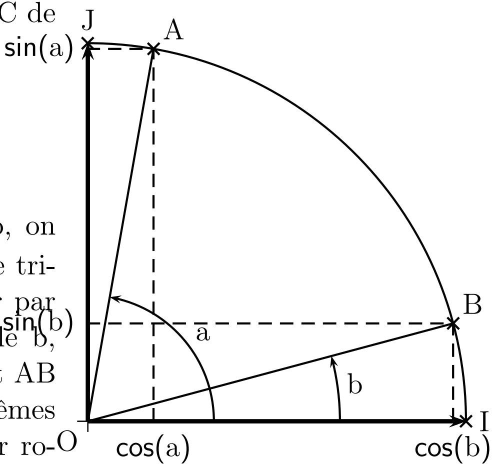
Puisque $\widehat{IOA} = a$ et $\widehat{IOB} = b$, on en déduit que $\widehat{BOA} = a - b$. Le triangle BOA peut donc s'obtenir par rotation du triangle IOC (angle b, centre O). Ainsi, les côtés IC et AB de ces deux triangles sont les mêmes (conservation des longueurs par rotation).



Formule $\cos(a - b)$ (1/3)

On considère deux angles a et b, et on construit les points A, B et C de la manière suivante :

- $\widehat{IOA} = a$
- $\widehat{IOB} = b$

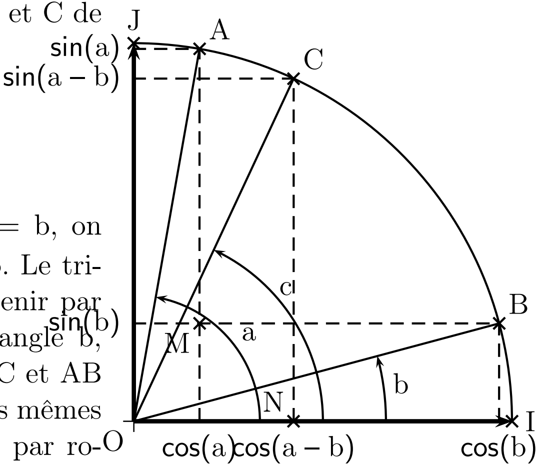


Puisque $\widehat{IOA} = a$ et $\widehat{IOB} = b$, on en déduit que $\widehat{BOA} = a - b$. Le triangle BOA peut donc s'obtenir par rotation du triangle IOC (angle b, centre O). Ainsi, les côtés IC et AB de ces deux triangles sont les mêmes (conservation des longueurs par rotation).

On considère deux angles a et b, et on construit les points A, B et C de la manière suivante :

- $\widehat{IOA} = a$
- $\widehat{IOB} = b$
- $\widehat{IOC} = a - b$

Puisque $\widehat{IOA} = a$ et $\widehat{IOB} = b$, on en déduit que $\widehat{BOA} = a - b$. Le triangle BOA peut donc s'obtenir par rotation du triangle IOC (angle b, centre O). Ainsi, les côtés IC et AB de ces deux triangles sont les mêmes (conservation des longueurs par rotation).



Le théorème de Pythagore dans CIN rectangle en N :

$$\begin{aligned} IC^2 &= IN^2 + NC^2 \\ &= (1 - \cos(a - b))^2 + (\sin(a - b))^2 \end{aligned}$$

Le théorème de Pythagore dans ABM rectangle en M :

$$\begin{aligned} AB^2 &= BM^2 + MA^2 \\ &= (\cos(b) - \cos(a))^2 + (\sin(a) - \sin(b))^2 \end{aligned}$$

Puisque $AB = IC$, on a également $AB^2 = IC^2$, donc en utilisant les deux valeurs calculées plus haut, il vient :

$$(1 - \cos(a - b))^2 + (\sin(a - b))^2 = (\cos(b) - \cos(a))^2 + (\sin(a) - \sin(b))^2$$

On peut maintenant développer cette expression :

$1+\cos^2(a-b)-2\cos(a-b)+\sin^2(a-b) = \cos^2(b)+\cos^2(a)-2\cos(a)\cos(b)+\sin^2(a) + \sin^2(b) - 2\sin(a)\sin(b)$

En utilisant maintenant le fait que, pour tout angle x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on peut largement simplifier cette équation.

$1+\cos^2(a-b)-2\cos(a-b)+\sin^2(a-b) = \cos^2(b)+\cos^2(a)-2\cos(a)\cos(b)+\sin^2(a)+\sin^2(b)-2\sin(a)\sin(b)$

$1+1-2\cos(a-b) = 1+1-2\cos(a)\cos(b)-2\sin(a)\sin(b)$

$2-2\cos(a-b) = 2-2\cos(a)\cos(b)-2\sin(a)\sin(b)$

$-2\cos(a-b) = -2\cos(a)\cos(b)-2\sin(a)\sin(b)$

$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)}$

En remarquant que $\cos(a+b) = \cos(a-(-b))$ il vient la formule pour $\cos(a+b)$:

$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$

Enfin pour les formules avec les sinus, en se souvenant (angles complémentaires) que $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)$, il vient :

$\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)}$

$\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}$