

Exercice 1 — Un peu d’histoire

Au départ, la fonction \log était utilisée pour sa propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \log(x \times y) = \log(x) + \log(y)$ (ce qui se lit “pour tout x réel, pour tout y réel, le logarithme de $x \times y$ est égal au logarithme de x plus le logarithme de y ”). En fait, ce fut la manière historique de définir les fonctions logarithmes : $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$: “rapport” et $\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\varsigma$: “nombre”. Il s’agissait à l’époque de faire des calculs facilement. Étant donné qu’une addition est bien moins coûteuse en temps qu’une multiplication, ils avaient trouvé le moyen de transformer le calcul d’une multiplication (il s’agissait de multiplier des chiffres astronomiques, au sens propre ainsi que figuré) en le calcul d’une addition.

Exemple : si on voulait multiplier 110,5 par 190,1 (en supposant que le calcul $110,5 \times 190,1$ soit pénible à effectuer) : on utilise le fait que $\log(110,5 \times 190,1) = \log(110,5) + \log(190,1)$:

1. on cherche la valeur de $\log(110,5)$ dans la Table 1. La table nous indique que c’est 2,04336. On cherche la ligne du nombre 110, et pour trouver 110,5, il faut regarder la colonne du 5 (les dixièmes sont les différentes colonnes). On lit donc 336 dans la table... mais ce 336 est dans les lignes qui démarrent par 04, donc en fait il s’agit de 04336. Et le 2 du 2,04336 vient du fait que la partie entière de $\log(110,5)$ est 2 puisque $10^2 = 100 \leq 110,5 < 1\,000 = 10^3$, donc le 2 n’est pas écrit dans la table pour gagner de la place (s’il fallait l’écrire à chaque fois pour chaque nombre entre 100 et 1000, quelle place perdue !)
2. on cherche la valeur de $\log(190,1)$ dans la Table 1. La table nous indique que c’est 2,27898.
3. on effectue l’addition : $2,04336 + 2,27898 = 4,32234$.
4. on cherche ensuite 4,32234 dans la suite de la table (non présentée ici) pour trouver son antécédent par \log et on trouve 21 005,8. Ainsi $110,5 \times 190,1 \approx 21\,005,8$. Pas mal comme méthode, étant donné que la valeur exacte est 21 006,05 : un écart relatif de $\frac{|v_{theorique} - v_{pratique}|}{v_{theorique}} \approx 1 \times 10^{-5} = 0,001\%$!

Cette méthode est présentée simplement pour l’anecdote, et n’est pas à savoir refaire : on a bien sûr aujourd’hui des calculatrices. L’ouvrage dont sont extraites les pages était destiné entre autres à l’usage des candidats au Baccalauréat... on préfère quand même utiliser Geogebra !

À faire :

1. Avec la méthode présentée, et en détaillant les étapes, donner la valeur qu’on trouverait pour la multiplication de 100,5 par 109,2. Quand on en est à l’étape 4, la recherche de l’antécédent se fera en regardant dans la Table 2.
2. Quel est le taux d’erreur, calculé comme $\frac{|v_{theorique} - v_{pratique}|}{v_{theorique}}$? Pour la valeur théorique, on se basera sur le résultat donné par la calculatrice.

Exercice 2 — Papier semi-logarithmique

Sur la dernière page, on trouve du papier semi-logarithmique. En abscisses, il s’agit d’une échelle habituelle, mais en ordonnées, il s’agit d’une échelle logarithmique : chaque “grande graduation” correspond à une puissance de 10 (par ex. 1 pour la première), puis les petites graduations vont de 2 à 9. Ainsi on pourrait graduer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50... .

1. Sur ce graphique, tracer les représentations des fonctions $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$ et $x \mapsto 5^x$. On fera démarrer l’axe des abscisses à 0, gradué de 1 en 1, et l’axe des ordonnées à 1 (gradué de manière logarithmique).
2. Que remarque-t-on ? Expliquer.

TABLE 1 - Nouvelles Tables de Logarithmes, Bouvart et Ratinet, Hachette (1957)

II
LOGARITHMES DES NOMBRES DE 1 A 10 000

II. Logarithmes des nombres de 1 à 10 000.

44 43
1 4,4 4,3
2 8,8 8,6
3 13,2 12,9
4 17,6 17,2
5 22,0 21,5
6 26,4 25,8
7 30,8 30,1
8 35,2 34,4
9 39,6 38,7
42 41
1 4,2 4,1
2 8,4 8,2
3 12,6 12,3
4 16,8 16,4
5 21,0 20,5
6 25,2 24,6
7 29,4 28,7
8 33,6 32,8
9 37,8 36,9
40 39
1 4 3,9
2 8 7,8
3 12 11,7
4 16 15,6
5 20 19,5
6 24 23,4
7 28 27,3
8 32 31,2
9 36 35,1
38 37
1 3,8 3,7
2 7,6 7,4
3 11,4 11,1
4 15,2 14,8
5 19,0 18,5
6 22,8 22,2
7 26,6 25,9
8 30,4 29,6
9 34,2 33,3
36 35
1 3,6 3,5
2 7,2 7,0
3 10,8 10,5
4 14,4 14,0
5 18,0 17,5
6 21,6 21,0
7 25,2 24,5
8 28,8 28,0
9 32,4 31,5
34 33
1 3,4 3,3
2 6,8 6,6
3 10,2 9,9
4 13,6 13,2
5 17,0 16,5
6 20,4 19,8
7 23,8 23,1
8 27,2 26,4
9 30,6 29,7
32 31
1 3,2 3,1
2 6,4 6,2
3 9,6 9,3
4 12,8 12,4
5 16,0 15,5
6 19,2 18,6
7 22,4 21,7
8 25,6 24,8
9 28,8 27,9
30 29
1 3 2,9
2 6 5,8
3 9 8,7
4 12 11,6
5 15 14,5
6 18 17,4
7 21 20,3
8 24 23,2
9 27 26,1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
1	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
2	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
3	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
4	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
5	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
6	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
7	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
8	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
9	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
1	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
2	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
3	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
4	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
5	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
6	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
7	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
8	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
9	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	08 918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
1	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
2	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
3	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
4	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
5	691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
6	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
7	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
8	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
9	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	09 394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
1	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
2	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
3	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
4	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
5	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
6	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
7	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
8	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
9	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	10 613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
1	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
2	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
3	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
4	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
5	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
6	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
7	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
8	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
9	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
1	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
2	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
3	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
4	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
5	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
6	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
7	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
8	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
9	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
1	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
2	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
3	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
4	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
5	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
6	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
7	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
8	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
9	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
1	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
2	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
3	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
4	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
5	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
6	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
7	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
8	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
9	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
1	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
2	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
3	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
4	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
5	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
6	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
7	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
8	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
9	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
1	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
2	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
3	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
4	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
5	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
6	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
7	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
8	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
9	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081

28
1 2,8
2 5,6
3 8,4
4 11,2
5 14,0
6 16,8
7 19,6
8 22,4
9 25,2
27
1 2,7
2 5,4
3 8,1
4 10,8
5 13,5
6 16,2
7 18,9
8 21,6
9 24,3
26
1 2,6
2 5,2
3 7,8
4 10,4
5 13,0
6 15,6
7 18,2
8 20,8
9 23,4
25
1 2,5
2 5,0
3 7,5
4 10,0
5 12,5
6 15,0
7 17,5
8 20,0
9 22,5
24
1 2,4
2 4,8
3 7,2
4 9,6
5 12,0
6 14,4
7 16,8
8 19,2
9 21,6
23
1 2,3
2

TABLE 2 - Nouvelles Tables de Logarithmes, Bouvart et Ratinet, Hachette (1957)

II^{bis}. LOGARITHMES DES NOMBRES
DE 10 000 à 11 000.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1000	00 000	004	009	013	017	022	026	030	035	039
1	043	048	052	056	061	065	069	074	078	082
2	087	091	095	100	104	108	113	117	121	126
3	130	134	139	143	147	152	156	160	165	169
4	173	178	182	186	191	195	199	204	208	212
5	217	221	225	230	234	238	243	247	251	255
6	260	264	268	273	277	281	286	290	294	299
7	303	307	312	316	320	325	329	333	337	342
8	346	350	355	359	363	368	372	376	381	385
9	389	393	398	402	406	411	415	419	424	428
1010	00 432	436	441	445	449	454	458	462	467	470
1	475	479	484	488	492	497	501	505	509	514
2	518	522	527	531	535	540	544	548	552	557
3	561	565	570	574	578	582	587	591	595	600
4	604	608	612	617	621	625	630	634	638	642
5	647	651	655	659	663	668	672	677	681	685
6	689	694	698	702	706	711	715	719	724	728
7	732	736	741	745	749	753	758	762	766	771
8	775	779	783	788	791	796	800	805	809	813
9	817	822	826	830	834	839	843	847	852	856
1020	00 860	864	869	873	877	881	886	890	894	898
1	903	907	911	915	920	924	928	932	937	941
2	945	949	954	958	962	966	971	975	979	983
3	988	992	996	*000	*005	*009	*013	*017	*022	*026
4	01 030	034	038	043	047	051	055	060	064	069
5	072	077	081	085	089	094	098	102	106	111
6	115	119	123	127	132	136	140	144	149	153
7	157	161	166	170	174	178	182	187	191	195
8	199	204	208	212	216	220	225	229	233	237
9	242	246	250	254	258	263	267	271	275	280
1030	01 284	288	292	296	301	305	309	313	317	322
1	326	330	334	339	343	347	351	355	360	364
2	368	372	376	381	385	389	393	397	402	406
3	410	414	418	423	427	431	435	439	444	448
4	452	456	460	465	469	473	477	481	486	490
5	494	498	502	507	511	515	519	523	528	532
6	536	540	544	549	553	557	561	565	570	574
7	578	582	586	590	595	599	603	607	611	616
8	620	624	628	632	636	641	645	649	653	657
9	662	666	670	674	678	682	687	691	695	699
1040	01 703	708	712	716	720	724	728	733	737	741
1	745	749	753	758	762	766	770	774	778	783
2	787	791	795	799	803	808	812	816	820	824
3	828	833	837	841	845	849	853	858	862	866
4	870	874	878	883	887	891	895	899	903	907
5	912	916	920	924	928	932	937	941	945	949
6	953	957	961	966	970	974	978	982	986	991
7	995	999	*003	*007	*011	*015	*020	*024	*028	*032
8	02 036	040	044	049	053	057	061	065	069	073
9	078	082	086	090	094	098	102	107	111	115

II^{bis}. LOGARITHMES DES NOMBRES
DE 10 000 à 11 000.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1050	02 119	123	127	131	135	140	144	148	152	156
1	160	164	169	173	177	181	185	189	193	197
2	02 202	206	210	214	218	222	226	230	234	239
3	243	247	251	255	259	263	268	272	276	280
4	284	289	292	296	300	304	309	313	317	321
5	02 325	330	333	337	341	345	350	354	358	362
6	366	370	375	378	382	386	391	395	399	403
7	02 407	412	416	419	423	428	432	436	440	444
8	449	453	457	461	465	469	473	477	481	485
9	490	494	498	502	506	510	514	518	522	526
1060	02 531	535	539	543	547	551	555	559	563	567
1	572	576	580	584	588	592	596	600	604	608
2	02 612	617	621	625	629	633	637	641	645	649
3	653	657	662	666	670	674	678	682	686	690
4	694	698	702	706	710	715	719	723	727	731
5	02 735	739	743	747	751	755	759	764	768	772
6	776	780	784	788	792	796	800	804	808	812
7	02 816	821	825	829	833	837	841	845	849	853
8	857	861	865	869	873	877	882	886	890	894
9	898	902	906	910	914	918	922	926	930	934
1070	02 938	942	946	951	955	959	963	967	971	975
1	979	983	987	991	995	999	*003	*007	*011	*015
2	03 019	024	028	032	036	040	044	048	052	056
3	060	064	068	072	076	080	084	088	092	096
4	03 100	104	109	113	117	121	125	129	133	137
5	141	145	149	153	157	161	165	169	173	177
6	181	185	189	193	197	201	205	209	214	218
7	03 222	226	230	234	238	242	246	250	254	258
8	262	266	270	274	278	282	286	290	294	298
9	03 302	306	310	314	318	322	326	330	334	338
1080	342	346	350	354	358	362	367	371	375	379
1	383	387	391	395	399	403	407	411	415	419
2	03 423	427	431	435	439	443	447	451	455	459
3	463	467	471	475	479	483	487	491	495	499
4	03 503	507	511	515	519	523	527	531	535	539
5	543	547	551	555	559	563	567	571	575	579
6	583	587	591	595	599	603	607	611	615	619
7	03 623	627	631	635	639	643	647	651	655	659
8	663	667	671	675	679	683	687	691	695	699
9	03 703	707	711	715	719	723	727	731	735	739
1090	743	747	751	755	759	763	767	771	775	778
1	782	786	790	794	798	802	806	810	814	818
2	03 822	826	830	834	838	842	846	850	854	858
3	862	866	870	874	878	882	886	890	894	898
4	03 902	906	910	914	918	922	926	930	933	937
5	941	945	949	953	957	961	965	969	973	977
6	981	985	989	993	997	*001	*005	*009	*013	*017
7	04 021	025	029	033	037	040	044	048	052	056
8	060	064	068	072	076	080	084	088	092	096
9	100	104	108	112	116	120	123	127	131	135

