Exercice 1

La formule donnée permet de remplir la première ligne : $P = V \times (1-t)^n$.

Pour remplir la ligne 2, on peut exprimer V en fonction du reste :

$$\begin{aligned} P &= V \times (1-t)^n & \quad & \div(1-t)^n \\ \frac{P}{(1-t)^n} &= V \end{aligned}$$

Pour remplir la ligne 3, on peut exprimer t en fonction du reste, comme c'était demandé :

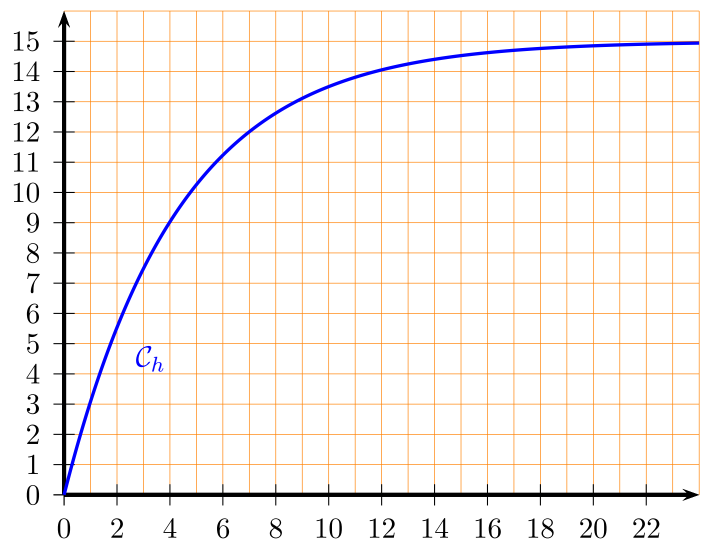
$$\begin{aligned} P &= V \times (1-t)^n & \quad & \div P \\ \frac{P}{V} &= (1-t)^n & & \text{Racine } n\text{-ième (car } \frac{P}{V} > 0) \\ \sqrt[n]{\frac{P}{V}} &= 1-t & & -1 \\ \sqrt[n]{\frac{P}{V}} - 1 &= -t & & \times(-1) \\ \boxed{1 - \sqrt[n]{\frac{P}{V}}} &= t \end{aligned}$$

Valeur initiale V	Taux de dépréciation annuel t	Durée n	Prix P
15 000€	15%	5 ans	$15\,000€ \times (1-0,15)^5 \approx \boxed{6\,655,58€}$
$\frac{10\,240€}{(1-0,2)^4} = \boxed{25\,000€}$	20%	4 ans	10 240€
10 000€	$1 - \sqrt[6]{\frac{5\,314,41}{10\,000}} = 0,1 = \boxed{10\%}$	6 ans	5 314,41€

Exercice 2

1. À l'aide de $h(t) = 15(1 - 10^{-0,1t})$ on calcule :
   (a) $h(0) = 15(1 - 10^{-0,1\times 0}) = 15(1 - 10^0) = 15(1-1) = 15 \times 0 = 0$. La hauteur du bambou au début des mesures est de $\boxed{0 \text{ m}}$.
   (b) $h(9) = 15(1 - 10^{-0,1\times 9}) = 15(1 - 10^{-0,9}) \approx 13,11$. La hauteur du bambou après 9 semaines est d'environ $\boxed{13{,}11 \text{ m}}$.
   (c) $h(15) = 15(1 - 10^{-0,1\times 15}) = 15(1 - 10^{-1,5}) \approx 14,53$. La hauteur du bambou après 15 semaines est d'environ $\boxed{14{,}53 \text{ m}}$.
2. Le premier semestre, cela fait environ 24 semaines. On a déjà 3 valeurs, on peut en calculer quelques autres avant de tracer :

t	$h(t)$
0	0
1	$3,08$
3	$7,48$
6	$11,23$
9	$13,11$
15	$14,53$
24	$14,94$



3. On lit graphiquement que c'est environ autour de la 3e semaine. On calcule $h(3) \approx 7,48$ (insuffisant) et $h(4) \approx 9,03$ (suffisant), donc c'est $\boxed{\text{à la 4e semaine}}$.

   BONUS : Il faut donc résoudre $h(t) = 7,5$.

$$\begin{aligned}
15(1 - 10^{-0,1t}) &= 7,5 && \text{Développement} \\
15 - 15 \times 10^{-0,1t} &= 7,5 && -15 \\
-15 \times 10^{-0,1t} &= -7,5 && \div(-15) \\
10^{-0,1t} &= 0,5 && \text{Composition avec } x \mapsto \log(x) \\
\log\left(10^{-0,1t}\right) &= \log(0,5) && \log(10^x) = x \\
-0,1t &= \log(0,5) && \div(-0,1) \\
t &= \boxed{\frac{\log(0,5)}{-0,1}}
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Écrire sous forme la plus simple possible (sans log ni puissance) :

1. $\log_3(3^x) = \boxed{x}$
2. $5^{\log_5(-1)}$ $\boxed{\text{n'existe pas}}$
3. $\log(4) + \log(25) = \log(4 \times 25) = \log(100) = \log(10^2) = \boxed{2}$

BONUS $\log_{15}(\sqrt[n]{15}) = \log_{15}\left(15^{\frac{1}{n}}\right) = \boxed{\frac{1}{n}}$

Exercice 4 : Résoudre les équations :

1. $9^{x-5} = 3^x$. On reconnaît que $9 = 3^2$. Donc $9^{x-5} = \left(3^2\right)^{x-5} = 3^{2(x-5)} = 3^{2x-10}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
3^{2x-10} &= 3^x && \text{Exposants égaux} \\
2x - 10 &= x && -x \\
x - 10 &= 0 && +10 \\
x &= 10
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{10\}}$.

2. $\log_2(x) = 5$. Ici on peut simplement composer à gauche et à droite par 2^x et on trouve $x = 2^5$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2^5\}}$ (2^5 est bien dans le domaine de définition de $\log_2(x)$ qui est $]0; +\infty[$).

BONUS $\log_5(2 - x) = \log_5(4 - 2x)$.

$$\begin{aligned}
\log_5(2 - x) &= \log_5(4 - 2x) && \text{Composition avec } x \mapsto 5^x \\
5^{\log_5(2-x)} &= 5^{\log_5(4-2x)} && 5^{\log_5(y)} = y \\
2 - x &= 4 - 2x && +2x \\
2 + x &= 4 && -2 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Maintenant, il faut vérifier le domaine de définition. $\log_5(2 - x)$ est défini quand $2 - x > 0$ c'est-à-dire quand $x < 2$. Donc 2 n'est pas dans son domaine, et ne pourra pas être solution ! Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

BONUS $2^{x-5} = 2^{3x-7}$. On a deux puissances d'un même nombre, on peut directement résoudre :

$$\begin{aligned}
2^{x-5} &= 2^{3x-7} && \text{Exposants égaux} \\
x - 5 &= 3x - 7 && -x \\
-5 &= 2x - 7 && +7 \\
2 &= 2x && \div 2 \\
1 &= x
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$.