Exercice 1 — Application du cours http://www.barsamian.am/2020-2021/S5P6/DS6_exo1.ggb

1. L'abscisse du sommet est $x_\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Ici, $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$, donc $x_\alpha = -\dfrac{2}{2\times 1} = -1$. Du coup, l'ordonnée est $y = (-1)^2 + 2\times(-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$. C'est-à-dire $\boxed{\alpha(-1;2)}$.

   On vérifie ça dans Geogebra en tapant dans l'outil CAS $a(x) := x^2 + 2x + 3$ qui fait apparaître la parabole, puis $Min(a(x), -2, 0)$ (on voit graphiquement que le minimum est dans l'intervalle $[-2;0]$) qui fait apparaître le sommet $(-1;2)$.
2. On tape dans Geogebra $f(x) := x^2 + 10x + 25$ puis on clique sur le bouton factoriser, ou alors on tape directement $Factoriser(x^2 + 10x + 25)$ qui donne $(x + 5)^2$. À la main, on doit reconnaître l'identité remarquable $x^2 + 2\times x\times 5 + 5^2 = (x + 5)^2$.

   Ainsi l'ensemble des racines de f est $\boxed{\{-5\}}$ (avec Geogebra on tape $Solutions(f(x) = 0)$).
3. Une fonction du second degré dont le graphique passe par les points $(1;0)$ et $(-3;0)$, c'est une fonction dont les deux racines sont 1 et -3, donc qui s'écrit $a(x-1)(x+3)$. Par exemple avec $a = 1$ on trouve l'équation $\boxed{y = (x-1)(x+3)}$.
4. Dans cette équation, $a = 3$, $b = 5$ et $c = -10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\times 3\times(-10) = 25 + 120 = 145$.

   Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{-5\pm\sqrt{145}}{6}$, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-5-\sqrt{145}}{6}; \dfrac{-5+\sqrt{145}}{6}\right\}}$.
5. On peut taper dans Geogebra $b(x) := x^2 + 3x - 10$ puis $c(x) := 5x - 3$ et enfin $Solutions(b(x) = c(x))$ ce qui donne $\boxed{\mathcal{S} = \{-2\sqrt{2}+1; 2\sqrt{2}+1\}}$. À la main, on résout :

   $$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &= 5x - 3 \\ x^2 - 2x - 7 &= 0 \end{aligned} \quad -5x+3$$

   Ici $a = 1$, $b = -2$ et $c = -7$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times 1\times(-7) = 4 + 28 = 32$. Donc on a deux solutions $x_\pm = \dfrac{2\pm\sqrt{32}}{2} = \dfrac{2\pm\sqrt{16\times 2}}{2} = \dfrac{2\pm 4\sqrt{2}}{2} = 1\pm 2\sqrt{2}$.

BONUS L'égalité $0 = 0$ est toujours vraie donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;+\infty[}$.

Exercice 2 — Problème http://www.barsamian.am/2020-2021/S5P6/DS6_exo2.ggb

1. Dans cette question, on a $c = 30$ et $b = 0$. On peut rentrer dans Geogebra $h(t) := -5t^2 + 30$, puis demander $h(1)$, $h(2)$ et $h(3)$.

   $h(1) = 25$ donc après 1 seconde, l'objet est à $\boxed{25 \text{ mètres}}$ de hauteur.

   $h(2) = 10$ donc après 2 secondes, l'objet est à $\boxed{10 \text{ mètres}}$ de hauteur.

   $h(3) = -15$. Mais attention, l'énoncé dit (comme dans l'exercice sur la baliste) que la fonction ne modélise la trajectoire que <u>avant</u> que l'objet ne touche terre. Une fois qu'il est à terre il y reste, donc ici après 3 secondes, l'objet a une altitude de $\boxed{0 \text{ mètre}}$ (et pas -15 mètres).
2. Attention, ici pour la question 2, ce qui a été fait à la question 1 n'est plus valable (la question 1 commence par "Dans cette question..."). Du coup, dans la question 2, on a :

   $$\begin{cases} h(t) = -5t^2 + b\times t + 30 & \text{car } c = 30 \\ h(5) = 0 & \text{car quand l'objet touche terre, } h \text{ modélise encore son altitude} \end{cases}$$

   On va donc rentrer dans Geogebra $h(t) = -5t^2 + b\times t + 30$.

   Il faut bien rentrer $b\times t$ et pas bt car si on rentre bt, Geogebra pense qu'on parle d'une variable dont le nom est bt, et pas de la variable b multipliée par la variable t.

   Geogebra va probablement renommer cette fonction, puisqu'on a déjà défini $h(t)$ plus haut. Ici dans le fichier Geogebra associé, Geogebra a renommé en $a(t)$.

   Une fois cela fait, on peut trouver b en demandant à Geogebra $Solutions(a(5) = 0, b)$ ou plus simplement $Solutions(a(5) = 0)$. Effectivement dans l'équation $-5\times 5^2 + b\times 5 + 30 = 0$, il est bien clair qu'il n'y a qu'une seule inconnue, b. Geogebra répond $\{19\}$. La vitesse initiale est donc de $\boxed{19 \text{ m/s}}$.

   À la main il s'agit donc d'une équation du premier degré où l'inconnue est b :

$$\begin{aligned}
-5\times 5^2+b\times 5+30 &= 0 && \text{On simplifie}\\
-125+5b+30 &= 0 && \text{On simplifie encore}\\
-95+5b &= 0 && +95\\
5b &= 95 && \div 5\\
b &= 19
\end{aligned}$$

3. On peut une nouvelle fois rentrer dans Geogebra $h(t)=-5t^2+8t+10$ (Geogebra renomme cette fonction en $c(t)$ dans le fichier joint). Puis, on résout $h(t)=12$ avec $Solutions(c(t)=12)$, Geogebra répond : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{4-\sqrt{6}}{5};\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}\right\}}$. Puis, on résout $h(t)=15$ avec $Solutions(c(t)=15)$: $\boxed{\mathcal{S}=\{\}}$.

BONUS Pour cette question bonus, c'est exactement le même départ que dans la question 2 avec $a(t)=-5t^2+bt+30$. On peut demander à Geogebra $Solutions(a(t)=0)$, il répond :
$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{b-\sqrt{b^2+600}}{10};\dfrac{b+\sqrt{b^2+600}}{10}\right\}$
On trouve bien sûr les mêmes solutions en résolvant à la main en calculant Δ. La première solution est négative (car $\sqrt{b^2+600}>b$), donc seule la seconde solution nous intéresse. On veut que cette seconde solution soit plus petite que 1 :
$Solutions\left(\dfrac{b+\sqrt{b^2+600}}{10}<1\right)$. Geogebra répond que c'est vrai quand $b<-25$, soit $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty;-25[}$.

Exercice 3 — Geogebra uniquement `http://www.barsamian.am/2020-2021/S5P6/DS6_exo3.ggb`

1. Dans l'outil CAS de Geogebra, on tape $g(x):=0.1x^3+x^2$.

   Penser à bien utiliser le point et pas la virgule pour le séparateur décimal.

   Ouvrir le tableur, taper -10 dans la case A2, puis `=A2 + 5` dans la case A3, cliquer sur A3 et étirer vers le bas. Dans la case B2 taper `=g(A2)` puis cliquer sur B2 et étirer vers le bas. Le tableau de valeurs de g sur I avec un pas de 5 est :

x	-10	-5	0	5	10	15
$g(x)$	0	12,5	0	37,5	200	562,5

2. Dans Geogebra on tape $Max(g(x),-10,15)$ pour avoir le maximum de g sur l'intervalle $[-10;15]$ et Geogebra donne $\left(15,\dfrac{1125}{2}\right)$ donc le maximum est $\boxed{562,5}$ et il est atteint pour $\boxed{x=15}$.

3. On a trouvé un des extremums (le maximum global). De même on demande à Geogebra $Min(g(x),-10,15)$ et Geogebra donne $(0,0)$ donc il y a un minimum global $\boxed{0 \text{ atteint pour } x=0}$.

   Si on regarde bien la courbe (ou le tableau de valeurs), on voit que ce n'est pas tout : il y a un autre maximum (local) de g, quelque part entre -10 et 0. On demande à Geogebra $Min(g(x),-10,0)$ et Geogebra donne $\left(-\dfrac{20}{3},\dfrac{400}{27}\right)$ donc il y a un maximum local $\boxed{\dfrac{400}{27} \text{ atteint pour } x=-\dfrac{20}{3}}$.

   Enfin toute fonction a des extremums locaux aux bords de l'ensemble de définition, donc ici en $x=-10$ il y a aussi un extremum : il y a un minimum local qui vaut $\boxed{0 \text{ atteint pour } x=-10}$.

4. On déduit donc que g est $\boxed{\text{croissante sur } \left[-10;-\dfrac{20}{3}\right]}$ puis elle est $\boxed{\text{décroissante sur } \left[-\dfrac{20}{3};0\right]}$ et enfin $\boxed{\text{croissante sur } [0;15]}$.

BONUS Sur l'intervalle $[-10;0[$, on a bien un maximum qu'on a déjà calculé $\left(\dfrac{400}{27} \text{ atteint pour } x=-\dfrac{20}{3}\right)$.

Par contre, sur l'intervalle $[0;10[$, il n'y a pas de maximum. Effectivement, g est strictement croissante sur $[0;10[$ et 10 n'est pas dans l'intervalle. Donc quel que soit le nombre α dans $[0;10[$ (par ex. $9,99$), il existera toujours un nombre β dans $[0;10[$ et plus grand (par ex. $9,992$) tel que $g(\beta)>g(\alpha)$. Donc il n'y a pas de valeur maximum (le maximum est une valeur atteinte par la fonction). Pour ce genre de cas on dit en fait qu'on a une $\boxed{\text{borne supérieure}}$ (notion hors programme, ici bien sûr la borne supérieure c'est $g(10)=200$), mais pas un maximum, car cette valeur n'est pas atteinte sur l'intervalle.