Exercice 1 : Examen harmonisé 2013.

Une école compte 400 étudiants. 250 d'entre eux jouent d'un instrument de musique et 100 d'entre eux font partie de la chorale. La probabilité qu'un élève choisi au hasard ne joue d'aucun instrument et ne chante pas dans la chorale est $\frac{1}{5}$.

1. Traduire la situation à l'aide d'un tableau ou d'un diagramme.
2. Combien d'étudiants font partie de la chorale et jouent également d'un instrument de musique ?
3. Trouver la probabilité qu'un élève choisi au hasard fasse partie de la chorale mais ne joue d'aucun instrument.
4. Trouver la probabilité qu'un membre de la chorale ne joue d'aucun instrument.
5. Trouver la probabilité qu'un étudiant ne jouant d'aucun instrument fasse partie de la chorale.

1. Mise en mathématiques de l'énoncé : ici on peut faire un tableau à double entrée ou un diagramme de Venn (mais un arbre n'est pas vraiment adapté). Le plus simple est le tableau à double entrée, car on peut directement reporter les nombres de l'énoncé (en rouge).

Instrument / Chorale	Oui	Non	Total
Oui	30	70	100
Non	220	$\frac{1}{5} \times 400 = 80$	300
Total	250	150	400

2. On peut directement lire dans le tableau qu'il y a $\boxed{\text{30 élèves}}$ qui font partie de la chorale et jouent d'un instrument.

Pour la suite de l'exercice, si on choisit un élève au hasard dans l'école, on va noter C = "l'élève fait partie de la chorale" et I = "l'élève joue d'un instrument".

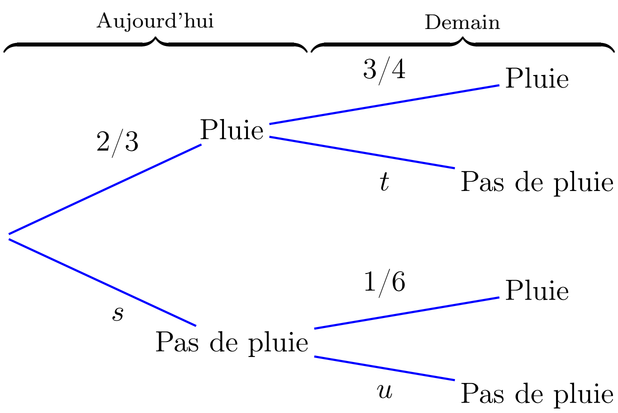
3. Ici on demande $P(\mathrm{C} \cap \bar{\mathrm{I}})$. On lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif}(\mathrm{C} \cap \bar{\mathrm{I}})}{\text{effectif total}} = \dfrac{70}{400} = \boxed{0,175}$.
4. Cette fois-ci on parle d'un élève dont on <u>sait</u> qu'il fait partie de la chorale. On demande donc $P_{\mathrm{C}}(\bar{\mathrm{I}})$. On lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif}(\mathrm{C} \cap \bar{\mathrm{I}})}{\text{effectif}(\mathrm{C})} = \dfrac{70}{100} = \boxed{0,7}$.
5. Cette fois-ci on parle d'un élève dont on <u>sait</u> qu'il ne joue pas de musique. On demande donc $P_{\bar{\mathrm{I}}}(\mathrm{C})$. On lit dans le tableau $\dfrac{\text{effectif}(\bar{\mathrm{I}} \cap \mathrm{C})}{\text{effectif}(\bar{\mathrm{I}})} = \dfrac{70}{150} \approx \boxed{0,467}$.

Exercice 2 : Examen harmonisé 2017.

Marie résout le problème suivant :

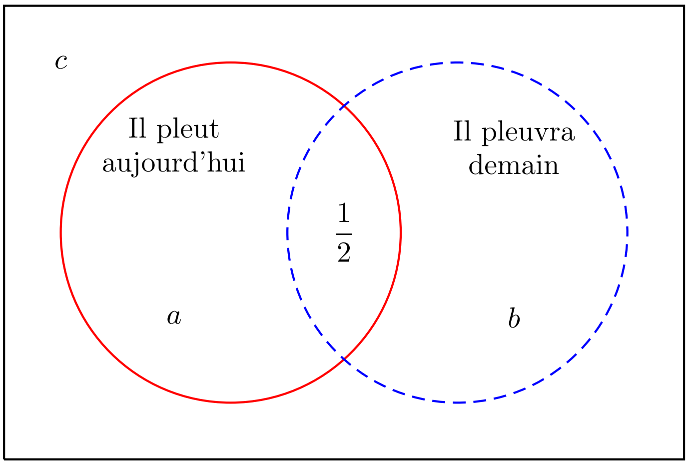
- La probabilité qu'il pleuve aujourd'hui est de $\frac{2}{3}$.
- S'il pleut aujourd'hui, la probabilité qu'il pleuve demain est de $\frac{3}{4}$.
- S'il ne pleut pas aujourd'hui, la probabilité qu'il pleuve demain est de $\frac{1}{6}$.

Marie utilise un arbre pour expliquer la situation.



1. Donner sous forme de fraction les valeurs de s, t et u.
2. Calculer la probabilité qu'il pleuve les deux jours.
3. Calculer la probabilité qu'il pleuve au moins un des deux jours.
4. Calculer la probabilité qu'il pleuve demain.

Anne résout le même problème avec un diagramme de Venn :



5. Calculer les valeurs a, b et c.
6. Est-ce que les événements "il pleut aujourd'hui" et "il pleuvra demain" sont des événements indépendants ?

Dans la suite, on va noter A = "il pleut aujourd'hui" et D = "il pleut demain".

1. $s = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$; $t = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$; $u = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$.
2. L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{D}$ = "il pleut les deux jours" est la branche tout en haut. Donc la probabilité est $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \boxed{0,5}$.
   Remarque : en continuant de lire l'énoncé, on voit que c'est bien la valeur qui est donnée par Anne dans le diagramme de Venn plus bas.
3. L'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{D}$ = "il pleut au moins un des deux jours" est présent sur les trois branches du haut. On peut additionner les trois probabilités, ou plus simplement remarquer qu'une seule branche correspond à l'événement contraire $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{D}}$ = "il ne pleut aucun des deux jours", donc c'est plus facile de calculer $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{D}) = 1 - P\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{D}}\right) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = 1 - \frac{5}{18} = \boxed{\frac{13}{18}}$.
4. L'événement D = "il pleut demain" est présent sur la branche du haut et la 3e branche (en partant du haut), donc on calcule $P(\mathrm{D}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \boxed{\frac{5}{9}}$.
5. $a = P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{D}}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{6}}$.

   $b = P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{D}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{18}}$.

   $c = P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{D}}) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{18}}$.
6. On voit sur l'arbre que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) \neq P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{D})$ donc $\boxed{\text{A et D ne sont pas indépendants}}$. On peut aussi voir que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{D})$ est différent de $P(\mathrm{D})$ ou calculer $P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{D})$ et voir que c'est différent de $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{D})$.