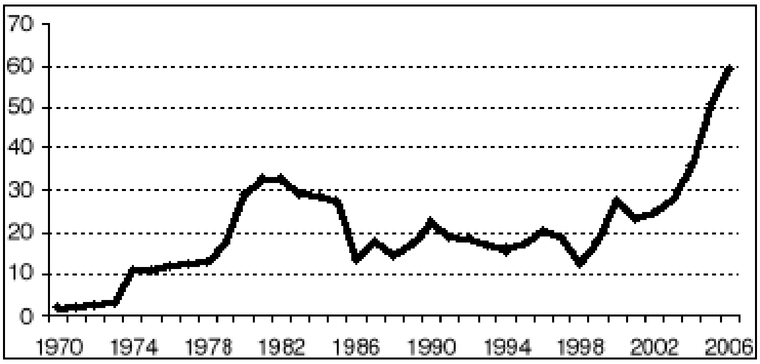
1 Des questions auxquelles vous savez répondre

Voici la courbe qui donne le prix en dollars d'un baril de pétrole en fonction du temps en années.



Source : Organisation des Pays Exportateurs de Pétrole

"Quel est le prix d'un baril de pétrole en l'année 1 987 ?" : c'est la lecture de $f(1987)$.

"En quelle(s) année(s) le baril de pétrole a-t-il coûté 20$?" : c'est la résolution de l'équation $f(x) = 20$.

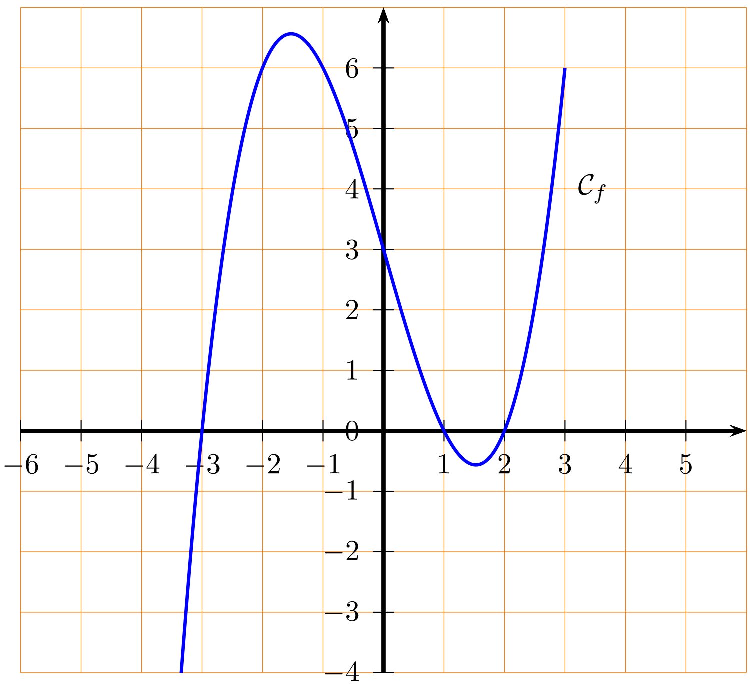
"En quelle(s) année(s) le baril de pétrole a-t-il coûté 30$ ou moins ?" : c'est la résolution de l'inéquation $f(x) \leq 30$.

Remarque très importante : le graphique d'une fonction f, c'est l'ensemble des points $(x; f(x))$ pour toute valeur x dans l'ensemble de définition de f.

2 Comment déterminer des images ?

2.1 Graphiquement :

Les images se lisent en ordonnées (axe vertical). Quand on demande l'image de -2 par une fonction f (c'est-à-dire $f(-2)$), on place -2 en abscisse (sur l'axe horizontal) et on lit l'ordonnée correspondante.



$\boxed{\text{Exemple 1 :}}$ déterminer graphiquement les images de -2; -1,5; -1; 0; 1; 1,5; 2 et 3 par la fonction f dont la courbe est donnée ci-contre :

2.2 Par le calcul :

Pour calculer l'image de 2 par f, c'est-à-dire calculer $f(2)$, on remplace x par 2 dans l'expression de $f(x)$.

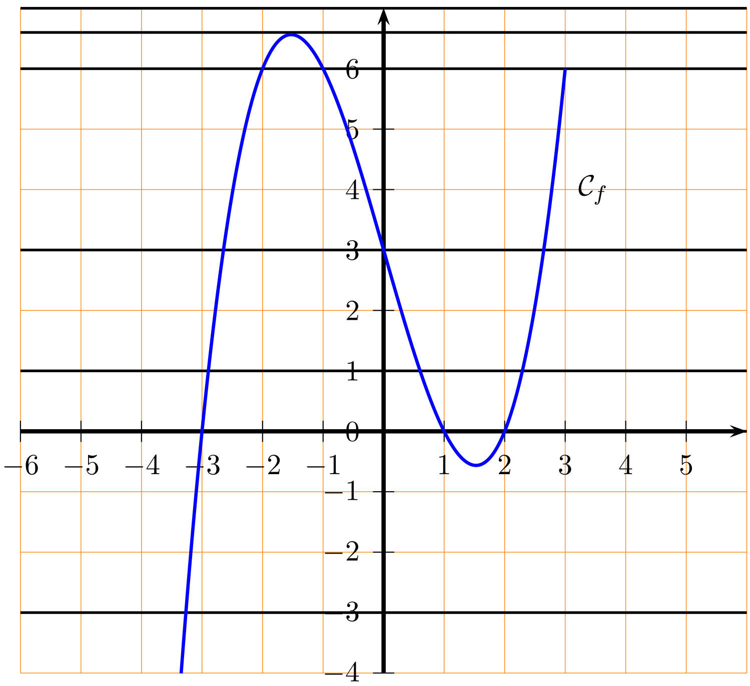
$\boxed{\text{Exemple 2 :}}$ soit la fonction f définie par $f : x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 1,3$. Déterminer $f(2)$, $f(-3)$ et $f(0,5)$.

3 Comment déterminer des antécédents ?

3.1 Graphiquement :

Les antécédents se lisent en abscisses. Pour déterminer par exemple le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 3 par f (donc, résoudre $f(x) = 3$), on trace la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3$, on lit les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{D}$: ce sont les antécédents.

$\boxed{\text{Exemple 3 :}}$ à partir du graphique ci-contre, déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de : -3; 0; 1; 3; 6; 6,6 et 7.



3.2 Par le calcul :

Pour déterminer le ou les antécédent(s) éventuel(s) d'un nombre a par f, on résout l'équation $f(x) = a$.

Par exemple pour trouver l'ensemble des antécédents de 3 par $f : x \mapsto f(x) = 2x - 5$, on résout :

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 3 & \\ & & & \text{On remplace } f(x) \text{ par son expression} \\ 2x-5 & = & 3 & \\ & & & \text{On ajoute 5} \\ 2x & = & 8 & \\ & & & \text{On divise par 2} \\ x & = & 4 & \end{array}$$

Ainsi l'ensemble des antécédents de 3 par f est l'ensemble $\{4\}$.

$\boxed{\text{Exemple 4 :}}$ soit f la fonction définie par $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 1$. Déterminer l'ensemble des antécédents par f de 5; 2; $\dfrac{5}{4}$; 1 et 0.

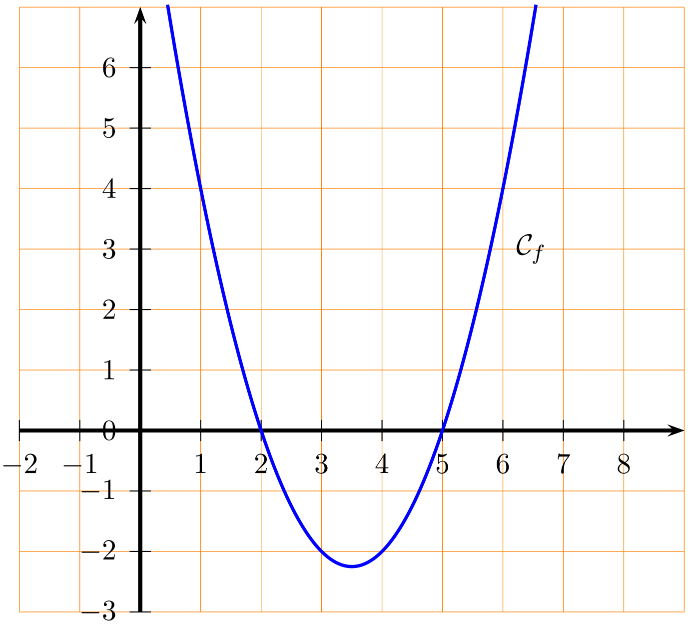
4 Comment résoudre graphiquement les équations $f(x) = k$, $f(x) = g(x)$ et les inéquations $f(x) < k$, ... $f(x) < g(x)$?

Résoudre (par exemple) l'équation $f(x) = 3$, c'est trouver les antécédents de 3 par f. On vient de voir comment faire.

Résoudre (par exemple) l'inéquation $f(x) < 5$, c'est trouver tous les nombres x qui ont une image strictement inférieure à 5. On trace donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 5$, on lit les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui sont strictement en-dessous de $\mathcal{D}$: ce sont les solutions.

<u>Remarque :</u> en règle générale, lorsque l'on résout une inéquation, on obtient tout un intervalle de solutions. Un intervalle, par exemple $[1; 4]$, c'est l'ensemble de tous les nombres qui sont entre 1 et 4. Si on veut exclure 1, on écrit $]1; 4]$. Si on veut exclure à la fois 1 et 4, on écrit $]1; 4[$.

Parfois, lorsqu'on résout une inéquation, les solutions sont "en plusieurs morceaux". Certaines sont dans un intervalle, d'autres sont dans un autre intervalle... donc l'ensemble des solutions, c'est la <u>réunion</u> de ces intervalles : on écrira alors mathématiquement avec un $\cup$ entre les deux intervalles pour donner l'ensemble de toutes les solutions.



Exemple 5 : résoudre graphiquement (on donne la courbe de la fonction f ci-contre) :

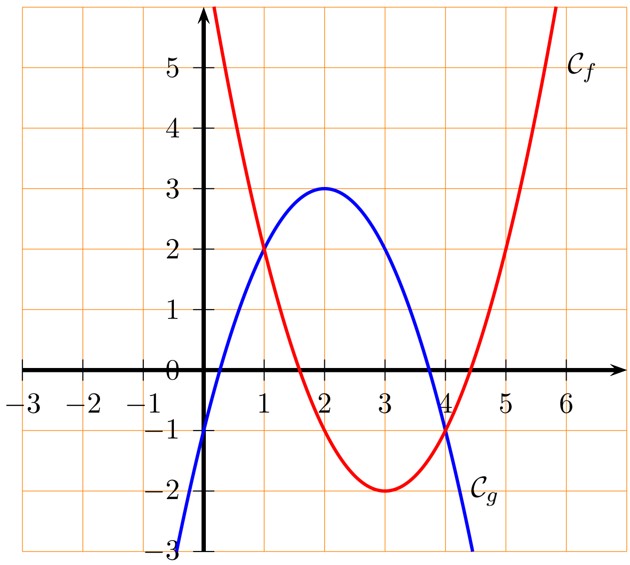
$f(x) = 4$	$f(x) < 4$	$f(x) \geq 4$
$f(x) = 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$
$f(x) = -2$	$f(x) \leq -2$	$f(x) > -2$

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à trouver les nombres x qui ont la même image par f et par g, ce qui revient à déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ revient à trouver les nombres x qui ont une image par f supérieure ou égale à leur image par g, ce qui revient à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui sont au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Exemple 6 : on donne les courbes de deux fonctions f et g. Résoudre graphiquement :

$f(x) = g(x)$ $\quad f(x) > g(x)$ $\quad f(x) \geq g(x)$



5 Construire un graphique

On peut regarder à la calculatrice à quoi le graphique ressemble, puis construire un tableau de valeurs.

Par exemple pour tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1; 5]$ par $f : x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 1$, on rentre l'expression dans la calculatrice et on trace la courbe. On demande un tableau de valeurs sur cet intervalle (une dizaine de points suffit) :

x	-1	0	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$f(x)$	6	1	-2	-2,75	-3	-2,75	-2	1	6

On n'a plus qu'à placer les différents points de coordonnées $(x; f(x))$ et on relie.

6 Trouver des paramètres

Parfois on définit une fonction à paramètres. Par exemple on définit la fonction f avec un paramètre m, qu'il faudra trouver, telle que $f(x) = mx + 5$. Pour trouver la valeur de ce paramètre, on utilisera en général une valeur de la fonction, ou un point du graphique (c'est équivalent, car $A \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(x_A) = y_A$).

Si l'on sait que $f(2) = 7$, alors on sait que, en remplaçant x par 2 dans l'expression de $f(x)$, cela donne 7, c'est-à-dire $m \times 2 + 5 = 7$. On peut donc résoudre cette équation, d'inconnue m, ce qui nous donne $m = 1$.

7 Exercices d'application

1. Soit $h : x \mapsto h(x) = x^2 + 4x + 2$ définie sur $[-5; 1]$.

   (a) Après avoir rempli le tableau de valeurs de la fonction h ci-dessous, tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ dans un repère orthonormé.

x	-5	-4	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0	1
$h(x)$									

   (b) Donner le tableau de variations de h.

   (c) Résoudre graphiquement $h(x) = 2$; $h(x) > 2$ et $h(x) \leq 2$

   (d) Donner un encadrement de $h(x)$ pour $x \in [-4; -1]$

   (e) Est-ce que le point $C(-2; -1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_h$?

2. On donne ci-contre $\mathcal{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g.
   Déterminer (on pourra utiliser des valeurs approchées, le cas échéant) :

   (a) L'ensemble de définition D_g de g.

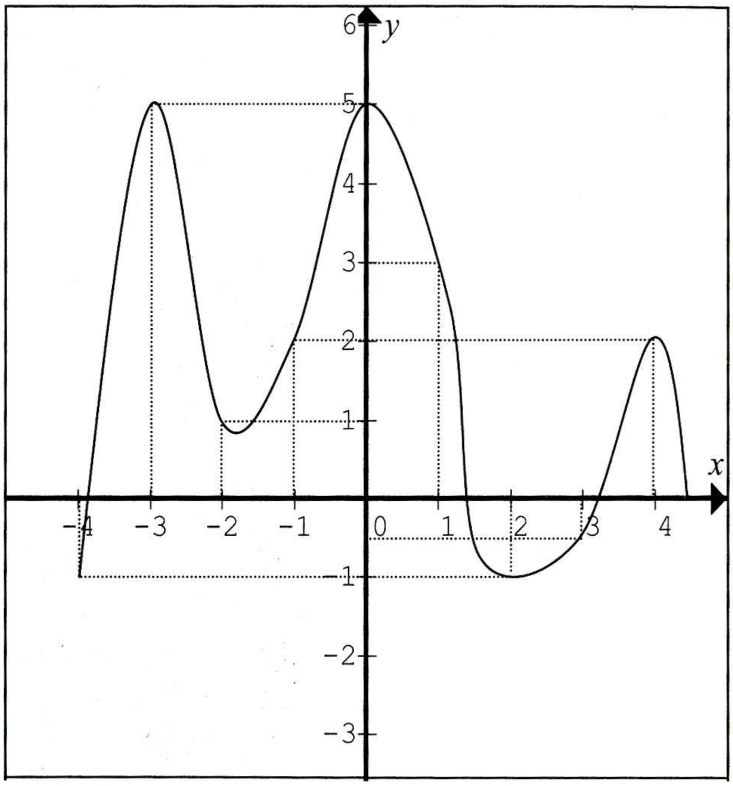
   (b) Les images par g de -4, 0 et 4.

   (c) L'ensemble des antécédents par g de : -1; 0; 6 et 5.

   (d) Le tableau de variations de g.

   (e) Le maximum et le minimum de g sur D_g.

   (f) S'il est vrai que $g(4) = g(-1)$?
   Que $g(3) = -\dfrac{g(-2)}{2}$?



3. Soit f une fonction dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-après :

   (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

   (b) Construire le tableau de variations de f.

   (c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur D_f. Pour quelles valeurs sont-ils atteints ?

   (d) Déterminer les encadrements suivants :

   - Si $-3 \leq x \leq 0$, alors .... $\leq f(x) \leq$ ....
   - Si $0 \leq x \leq 3$, alors .... $\leq f(x) \leq$ ....
   - Si $-3 \leq x \leq 3$, alors .... $\leq f(x) \leq$ ....
   - Si $0 \leq x \leq 4,5$, alors .... $\leq f(x) \leq$ ....