3 Découvrir les suites arithmétiques

15 min

Un T-shirt coûte 20 € en 2018.
Chaque année, le prix augmente de 2 € par rapport au prix de l'année précédente.

1. **a)** Combien coûtera-t-il en 2019 ?
b) Combien coûtera-t-il en 2020 ?
c) Combien coûtera-t-il en 2028 ?
On note u_n le prix de l'article en 2018 + n.

2. Déterminer la valeur de u_0.

3. On cherche à expliciter comment évolue le prix d'une année sur l'autre.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. À quelle année correspond u_{20} ?
En déduire la valeur de u_{20}.

Cours 2 p. 49

4 Découvrir les suites géométriques

30 min

On rappelle que :
- le taux d'évolution en pourcentage est donné par la formule $\dfrac{V_{\text{finale}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}} \times 100$;
- augmenter de t % c'est multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$;
- diminuer de t % c'est multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

1. On s'intéresse à l'évolution de la population dans un village.

Année	2017	2018	2019
Nombre d'habitants	2 500	2 750	3 025

a) Quel est le taux d'évolution en pourcentage du nombre d'habitants entre 2017 et 2018 ?
b) Quel est le taux d'évolution en pourcentage du nombre d'habitants entre 2018 et 2019 ?

2. On suppose que le taux d'évolution d'une année sur l'autre reste constant après 2019.
Quel sera le nombre d'habitants en 2020 ? en 2021 ?

3. On décide de modéliser le nombre d'habitants par une suite.
On note v_n le nombre d'habitants du village en 2017 + n.
Déterminer la valeur de v_0.

4. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On cherche à déterminer une expression de v_n en fonction de n.
Recopier et compléter les égalités ci-dessous.
$v_1 = \dots \times v_0$ $\qquad$ $v_2 = \dots \times v_0$ $\qquad$ $v_3 = \dots \times v_0$

6. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Cours 3 p. 50

Cours

1 Généralités sur les suites

Définition Suite

Une suite est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ ou sur un ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé (c'est-à-dire pour tous les entiers à partir d'un entier n_0), qui à tout entier naturel n associe un réel $u(n)$, noté u_n.

Notation

La suite est notée (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ou u.

u_n est le terme général de la suite, ou le terme de rang n.

Exemples

- La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$. Le premier terme est u_0 et $u_0 = -1$.
- La suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 6$ par $u_n = \dfrac{1}{n-5}$. Le premier terme est u_6 et $u_6 = 1$.
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.

Remarque Dans les deux premiers exemples, on a l'expression de u_n en fonction de n. On peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par le rang souhaité.
Dans ces cas, la suite est dite définie par une formule explicite.

Exemple

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.
On a alors $u_0 = 2^0 = 1$; $u_{10} = 2^{10} = 1\,024$.

Exercices résolus 1 et 2 p. 56-57

Définition Suite définie par une relation de récurrence

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner un ou plusieurs premiers termes et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Remarque

- Il n'est pas toujours facile d'avoir une formule explicite d'une suite définie par récurrence.
- Il ne faut pas confondre u_{n+1}, qui désigne le terme suivant u_n, et $u_n + 1$, qui désigne le terme u_n auquel on ajoute 1.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = -6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 3u_n + 15$.
Pour $n = 0$, on a $u_{0+1} = 3u_0 + 15$, c'est-à-dire $u_1 = 3 \times (-6) + 15 = -3$.
Pour $n = 1$, on a $u_{1+1} = 3u_1 + 15$, c'est-à-dire $u_2 = 3 \times (-3) + 15 = 6$.
Pour calculer un terme, on doit connaître le précédent. Par exemple, $u_{20} = 3u_{19} + 15$.

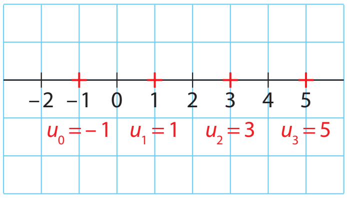
Exercice résolu 2 p. 57

Règles Représentations graphiques

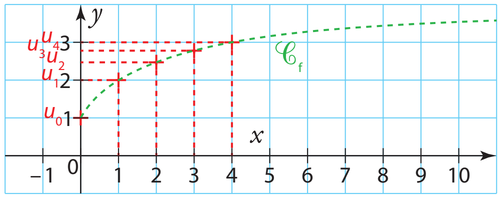
1. **Sur une droite graduée, on place les réels d'abscisses u_0 ; u_1 ; u_2 ; …**
2. **Dans un repère, on place les points de coordonnées $(n ; u_n)$.**
3. **Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, alors u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe représentative de la fonction f.**
4. **Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on construit les termes à l'aide de la courbe de représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$.**

Exemples

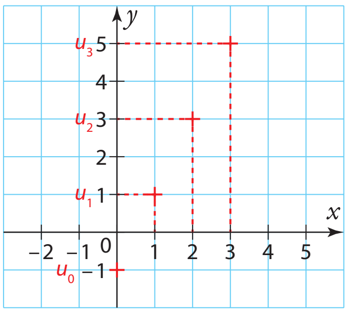
① On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.



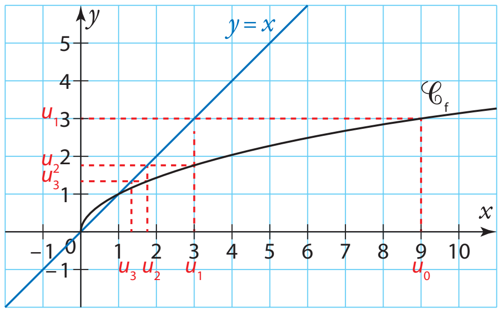
③ On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$.



② On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.



④ On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.



Exercice résolu 4 p. 59

2 Suite arithmétique

Définition Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + (-0{,}5)$. (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r.

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r \times (n - 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r \times (n - p)$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} u_n$$

$$u_0 \xrightarrow{+n \times r} u_n$$

Exemple

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.
Cette suite est arithmétique de raison $r = -0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 3$ (voir l'exemple précédent).
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + r \times n = 3 - 0{,}5n$.

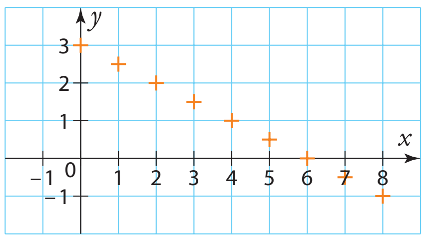
Exercice résolu 5 p. 60

Règle **Représentation graphique**

Les points de sa représentation graphique se situent sur la droite d'équation $y = r \times x + u_0$.
On parle d'évolution linéaire.

Exemple

Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 3 - 0{,}5n$.



3 Suite géométrique

Définition **Suite géométrique**

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$ est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.
- Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n$. Donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 5$.

Remarques

- Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Si les termes sont non nuls, on peut aussi chercher à montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à une constante q.

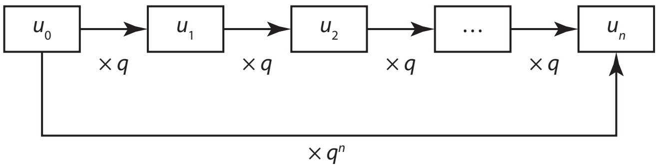
- La variation relative entre deux termes consécutifs est constante.

Propriété — Expression du terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.



Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$.
Cette suite est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$ (voir l'exemple précédent).
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}5 \times 2^n$.

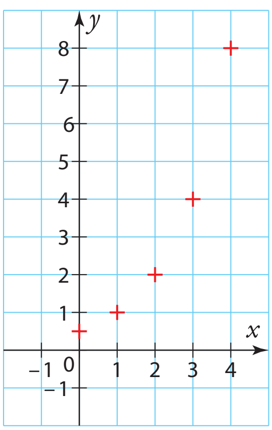
Exercice résolu 6 p. 61

Règle — Représentation graphique

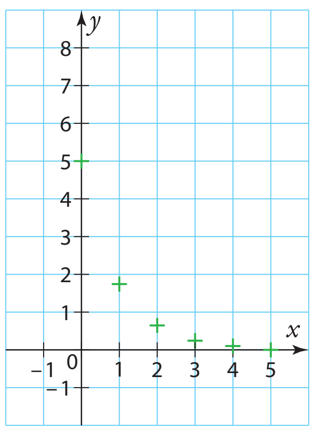
Pour les représentations graphiques des suites géométriques, on parle d'évolution exponentielle.

Exemples

1. Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0{,}5 \times 2^n$.



2. Soit (v_n) définie par $v_0 = 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$



Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths1-04

3 Modéliser avec une suite

Cours 1 p. 48

Une salle de sport compte 500 abonnés en 2019. Chaque année, 80 % des personnes inscrites renouvellent leur abonnement et 20 nouvelles personnes s'abonnent.

On note (u_n) la suite correspondant au nombre d'abonnés en 2019 + n.

1. Combien y aura-t-il d'abonnés en 2020 ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer combien il y aura d'abonnés en 2030. On arrondira à l'entier inférieur.

4. Si le nombre d'abonnés devient inférieur à 101, la salle de sport décide de fermer.

À l'aide de la calculatrice, déterminer si la salle de sport fermera. Le cas échéant, déterminer en quelle année.

Solution

1. 80 % des personnes inscrites renouvellent leur abonnement.

$500 \times \dfrac{80}{100} = 400$.

Donc 400 personnes renouvellent leur abonnement.

Il y a 20 nouvelles personnes qui s'abonnent.
400 + 20 = 420. Donc, en 2020, il y aura 420 abonnés.

2. Chaque année, 80 % des personnes inscrites renouvellent leur abonnement et il y a 20 nouvelles personnes. **1**

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{80}{100}u_n + 20 = 0{,}8u_n + 20$. **2**

3. 2030 = 2019 + 11. **3**

Il faut donc calculer u_{11} à la calculatrice.

La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence.

On affiche la table de valeurs de la suite (u_n) à la calculatrice **4**

On trouve $u_{11} \approx 134{,}36$.

Il y aura donc environ 134 abonnés en 2030.

4. On cherche s'il existe un entier naturel n tel que $u_n < 101$. **5**

Pour cela, on affiche la table de valeurs de la suite (u_n) à la calculatrice.

On a $u_{26} \approx 101{,}21$ et $u_{27} \approx 100{,}96$.

Or 2019 + 27 = 2046.

Donc en 2046, le nombre d'abonnés deviendra inférieur à 101 et la salle de sport devra fermer.

Conseils & Méthodes

1 u_n correspond au nombre d'abonnés en 2019 + n.
u_{n+1} correspond au nombre d'abonnés en 2019 + n + 1, c'est-à-dire l'année suivante.
Par exemple, u_1 correspond au nombre d'abonnés en 2020 et u_2 en 2021.

2 La valeur donnée en 2019 n'est pas utilisée pour exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3 Il faut d'abord déterminer la valeur de n qui correspond à 2030.

Pour cela, on résout l'équation 2019 + n = 2030. Donc n = 2030 − 2019.

4 Voir exercice résolu 2.

5 Le nombre d'abonnés en 2019 + n est u_n.

On cherche donc quand u_n devient inférieur à 101, c'est-à-dire $u_n < 101$.

À vous de jouer !

5 Une entreprise a 200 salariés en 2019. Chaque année, 10 % des employés quittent l'entreprise, et l'entreprise embauche 30 nouveaux salariés.

On note (u_n) la suite correspondant au nombre de salariés dans l'entreprise en 2019 + n.

1. Combien y aura-t-il de salariés en 2020 ? et en 2021 ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

6 Dans un magasin, un pull coûte 60 €. À chaque période de soldes organisées par le magasin, le prix du pull baisse de 15 %

1. Quel sera le prix du pull après les premières soldes ?

2. On note (u_n) le prix du pull après n soldes.

a) Déterminer la valeur de u_0 et u_1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercices 34 à 49 p. 64-65

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths1-04

5 Utiliser et reconnaître une suite arithmétique

Cours 2 p. 49

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison -2.

a) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

b) Déterminer la valeur de u_{25}.

2. Les suites ci-dessous sont-elles arithmétiques ?

a) $v_n = 3n - 2$ **b)** $w_n = n^2 + 1$ **c)** $a_n = \dfrac{n^2 + n}{n}$

Solution

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$. **1**

Donc ici, $u_n = 5 - 2n$

b) $u_{25} = 5 - 2 \times 25 = -45$ **2**

2. Pour chaque suite, on commence par calculer les premiers termes. **3**

a) $v_0 = 3 \times 0 - 2 = -2$

$v_1 = 3 \times 1 - 2 = 1$

$v_2 = 3 \times 2 - 2 = 4$

$v_1 - v_0 = 3$ et $v_2 - v_1 = 3$

La suite (v_n) semble arithmétique. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = [3(n+1) - 2] - (3n - 2)$

$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$

$= 3$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 3.

b) $w_0 = 0^2 + 1 = 1$

$w_1 = 1^2 + 1 = 2$

$w_2 = 2^2 + 1 = 5$

$w_1 - w_0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 3$

Donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique, car $w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$.

c) $a_1 = \dfrac{1^2 + 1}{1} = 2$; $a_2 = \dfrac{2^2 + 2}{2} = 3$; $a_3 = \dfrac{3^2 + 3}{3} = 4$ **4**

$a_2 - a_1 = 1$ et $a_3 - a_2 = 1$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

Donc la suite (a_n) semble arithmétique. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{n^2 + n}{n}$ **5**

$= \dfrac{n \times (n+1)}{n}$

Donc $a_n = n + 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = (n+1) + 1 - (n+1)$

$= n + 2 - n - 1$

$= 1$

Donc la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 1.

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, on utilise les formules du cours.

2 Pour calculer u_{25}, on remplace n par 25 dans l'expression de u_n.

3 Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il faut montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égale à une constante. Si on trouve un contre-exemple, la suite n'est pas arithmétique. Un exemple ne suffit pas à montrer que la suite est arithmétique.

4 a_n est défini pour $n \neq 0$, donc le premier terme de la suite (a_n) est a_1

5 Avant de calculer $a_{n+1} - a_n$, on peut essayer de simplifier l'expression de a_n.

À vous de jouer !

9 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 3.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

2. Déterminer la valeur de u_{20}.

10 Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

a) $v_n = \sqrt{n}$ **b)** $w_n = -n + 4$

Exercices 50 à 60 p. 65-66

6 Utiliser et reconnaître une suite géométrique

Cours 3 p. 50

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 telle que $u_2 = \frac{1}{4}$.

a) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

b) Déterminer la valeur de u_6.

2. Les suites ci-dessous sont-elles géométriques ?

a) $u_n = n^2 + 1$ **b)** $u_n = 2^{n+1}$ **c)** $u_n = \frac{1}{n}$

Solution

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_2 \times q^{n-2}$. 1

Donc ici, $u_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-2}$.

b) $u_6 = \frac{1}{4} \times 2^{6-2} = \frac{1}{4} \times 2^4 = 4$ 2

2. Pour chaque suite, on commence par calculer les premiers termes. 3

a) $u_0 = 0^2 + 1 = 1$

$u_1 = 1^2 + 1 = 2$

$u_2 = 2^2 + 1 = 5$

$\frac{u_1}{u_0} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{2}$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique, car $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

b) $u_0 = 2^{0+1} = 2$

$u_1 = 2^{1+1} = 4$

$u_2 = 2^{2+1} = 8$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{2} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{4} = 2$.

Donc la suite (u_n) semble géométrique de raison 2. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2^{n+1+1} \\ &= 2^{n+2} \\ &= 2 \times 2^{n+1} \\ &= 2 \times u_n \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2.

c) $u_1 = \frac{1}{1} = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{3}$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, on utilise les formules du cours.

2 Pour calculer u_6, on remplace n par 6 dans l'expression de u_n.

3 Pour montrer qu'une suite est géométrique, il faut montrer que $u_{n+1} = q \times u_n$ avec q une constante ou que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à une constante (si les termes sont non nuls).
Si on trouve un contre-exemple, la suite n'est pas géométrique.
Un exemple ne suffit pas à montrer que la suite est géométrique.

4 $\frac{1}{n}$ est défini pour $n \neq 0$, donc le premier terme de la suite (u_n) est u_1.

À vous de jouer !

11 Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 2.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

2. Déterminer la valeur de u_{10}.

12 Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

a) $v_n = \sqrt{n}$ **b)** $w_n = \frac{1}{3^n}$

Exercices 61 à 69 p. 66

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

21 Associer chaque expression avec sa notation.

① Terme de rang n Ⓐ (u_n)
② Suite Ⓑ u_0
③ Premier terme Ⓒ u_n

22 Donner un exemple de suite définie par une formule explicite et un exemple de suite définie par une relation de récurrence.

23 Construire un tableau à deux colonnes, une pour les suites arithmétiques et une pour les suites géométriques et dans chaque colonne, écrire les formules du cours associées à chaque type de suite.

Questions - Flash

Diapo
Diaporama
Ressource professeur

24 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.
Calculer u_5

25 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n^2$.
Calculer u_2.

26 Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -2 telle que $u_1 = 3$.
Calculer u_2.

27 Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_4 = 5$.
Calculer u_{10}.

28 Soit (v_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -3$.
Donner l'expression de v_n en fonction de n.

29 Soit (w_n) la suite géométrique de raison 3 telle que $w_1 = 2$.
Calculer w_2.

30 Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 telle que $u_4 = 3$.
Calculer u_{10}.

31 Calculer $1 + 2 + \ldots + 50$.

32 Calculer $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10}$.

33 Dans chaque cas, conjecturer la limite de la suite (u_n) dont certains termes sont donnés ci-dessous.
a) $u_1 = 10$, $u_{10} = 200$, $u_{100} = 4\,000$ et $u_{1000} = 80\,000$.
b) $u_1 = -4{,}5$, $u_{10} = -4{,}9$, $u_{100} = -4{,}99$ et $u_{1000} = -4{,}999$.

Suites définies par une formule explicite

34 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 3$.
Calculer u_0, u_1 et u_2.

35 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{2n-3}$.
Calculer u_0 et u_{10}.

36 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - 1$.
Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

37 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$.
Exprimer u_{n+1}, u_{n-1}, u_{2n} et $u_n + 1$ en fonction de n.

38 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$.
Exprimer u_{n+1}, u_{n-1}, u_{2n} et $u_n + 1$ en fonction de n.

39 Thomas paye 45 € un abonnement résidentiel annuel pour garer sa voiture dehors. Il doit ensuite payer 1,5 € supplémentaire par jour de stationnement.
On note u_n le prix que Thomas paye pour son abonnement et n jours de stationnement.
1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Combien payera-t-il au total s'il gare sa voiture dehors 300 jours par an ?

Suites définies par une relation de récurrence

40 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. À l'aide de la calculatrice, calculer u_{20}.

41 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 2}{u_n - 3}$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de u_{15} à 10^{-2} près.

42 On considère la suite (u_n) définie par $u_2 = -3$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = u_n^2 - 6$.
Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite.

43 Une ludothèque possède 100 jeux de société en 2019. Chaque année, elle donne 5 % de ses jeux à une œuvre de charité et décide d'acheter 10 nouveaux jeux.
1. Combien aura-t-elle de jeux en 2020?
2. On note u_n le nombre de jeux de société de la ludothèque en $2019 + n$.
Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

44 Un matin, Mathéo décide de poser un récipient dans son jardin, contenant 200 g de noisettes.
Chaque après-midi, un écureuil vient manger la moitié du récipient, puis Mathéo remet 80 g de noisettes le soir.

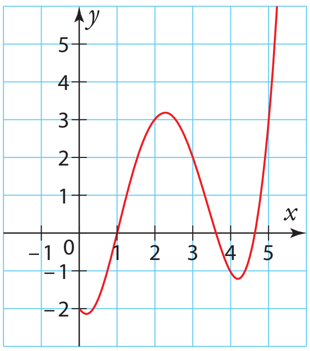
On note u_n la quantité en grammes de noisettes dans le récipient le n-ième jour au matin.

1. Donner la valeur de u_1 et u_2.

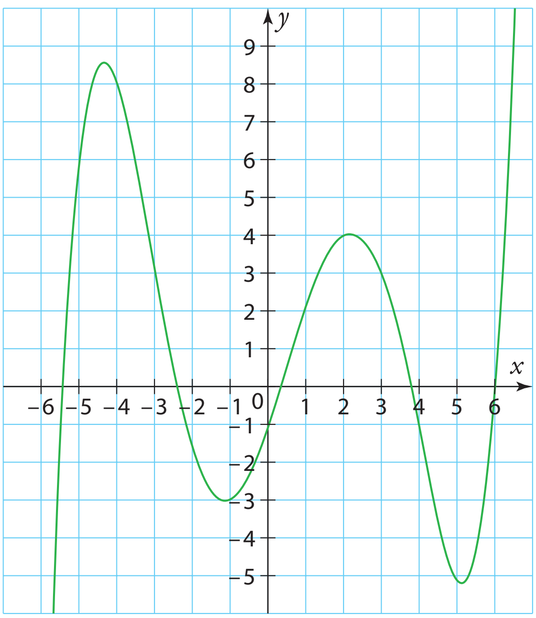
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Représentation graphique

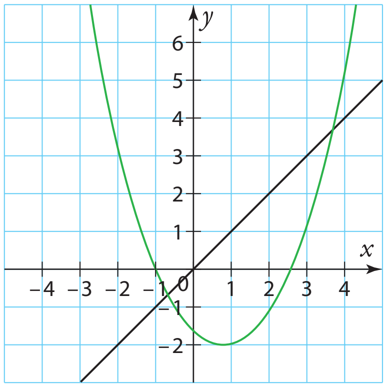
45 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).



46 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = f(v_n)$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (v_n).



47 On a représenté graphiquement une fonction f et la droite d'équation $y = x$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.



Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (v_n).

48 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction racine carrée.

2. Sur le même graphique, représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).

49 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$.
Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).

Suites arithmétiques

50 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 2$.
Calculer u_1, u_2 et u_3.

51 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. Calculer u_{20}.

52 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_3 = -1$.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

2. Calculer u_{10}.

53 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ telle que $u_4 = 9$.
Déterminer la valeur du premier terme de la suite u_0.

54 Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_0 = 3$ et $u_1 = 7$.
Déterminer la valeur de la raison de la suite.

55 Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_6 = -1$.
Déterminer la valeur de la raison de la suite.

56 Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Justifier.
a) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 4$.
b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -n + 3$.
c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = n^2 - 3$.

57 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+1)^2 - n^2$.
Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.

58 La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$ et de premier terme $u_0 = 5$.
1. Représenter graphiquement les dix premiers termes de la suite.
2. Que peut-on dire de ces points ?

59 Leila avait 10 jeux vidéo en janvier 2019. Depuis février 2019, elle décide d'acheter deux nouveaux jeux le premier jour de chaque mois. On note u_n le nombre de jeux vidéo de Leila en fin de mois, n mois après janvier.
1. Déterminer la valeur de u_0.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

60 Enzo décide de s'entraîner pour une épreuve de natation, où il devra nager sur une distance de 1 500 m. Pour cela, il va dans une piscine dont la longueur est de 50 m.
Le premier jour, il fait deux longueurs.
Puis chaque jour il nage une longueur de plus que le jour précédent.
On note u_n la distance réalisée en mètres le n-ième jour.
1. Donner la valeur de u_1.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

Suites géométriques

61 Soit (u_n) une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.
Calculer u_1, u_2 et u_3.

62 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -1$.
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{10}.

63 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ telle que $u_5 = 2$.
1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{10}.

64 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3 = 12$.
Déterminer la valeur du premier terme de la suite u_0.

65 Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = -3$ et $u_1 = 4$.
Déterminer la valeur de la raison de la suite.

66 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 1$.
Déterminer la valeur de la raison de la suite.

67 Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Justifier.
a) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -3^n$
c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{4^n}$
d) (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \frac{1}{n+1}$

68 Une ville comptait 10 000 habitants en 2018. Chaque année, le nombre d'habitants augmente de 10 % par rapport à l'année précédente. On note u_n le nombre d'habitants en $2018 + n$.
1. Donner la valeur de u_0 et de u_1.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

69 Yacine a préparé un gâteau au chocolat qu'il a déposé dans une assiette dans la cuisine. À chaque fois qu'il passe devant, il se sert la moitié de ce qui reste.

On note u_n la proportion du gâteau qui reste dans l'assiette après que Yacine se soit servi n fois.
1. Donner la valeur de u_0 et de u_1.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

Calcul de sommes

70 Calculer les sommes suivantes.
a) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 15$
b) $S = 1 + 2 + \ldots + 7$
c) $S = 8 + 9 + \ldots + 15$
d) $S = 7 + 8 + \ldots + 50$

71 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -1$.
Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite (u_n).

72 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 4$.
Calculer la somme des 30 premiers termes de la suite (u_n).

73 Calculer la somme des 25 premiers entiers naturels pairs.

74 Calculer les sommes suivantes.
a) $S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{12}$
b) $S = 1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + 1\,024 - 2\,048$

75 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme 10.
Calculer la somme des 10 premiers termes de (u_n).

76 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme −9.
Calculer la somme des 15 premiers termes de (u_n).

Sens de variation d'une suite

77 En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, étudier les variations des suites (u_n), définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = n^2 + 2n$

b) $u_n = \dfrac{4}{n+1}$

c) $u_n = -5^n$

78 En comparant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, étudier les variations des suites (u_n), définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = 7 \times 0{,}5^n$

b) $u_n = 4 \times 9^n$

79 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

1. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2n}{n+1} > 1$

3. En déduire les variations de la suite (u_n).

80 Étudier les variations des suites ci-dessous.

a) (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + \sqrt{n}$

b) (v_n) définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = \dfrac{3}{v_n}$

81 Étudier les variations des suites ci-dessous.

a) (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

b) (v_n) est définie par $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 5$.

82 Déterminer le sens de variation des suites suivantes.

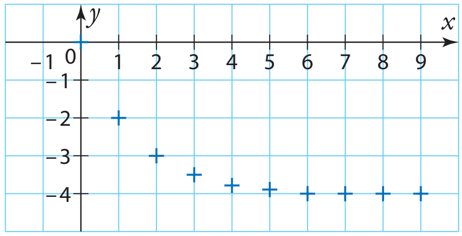
a) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

b) (v_n) est définie par $v_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5 \times v_n$.

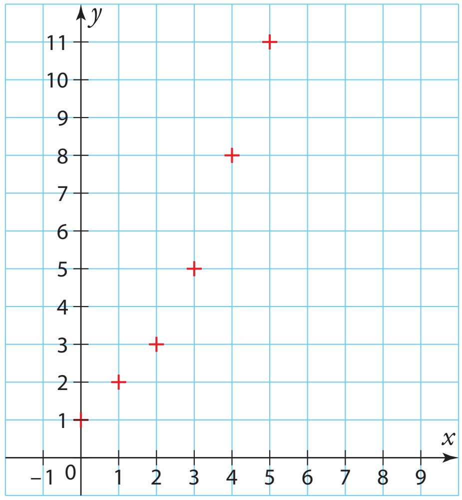
Limite

83 Conjecturer, si elle existe, la limite des suites ci-dessous.

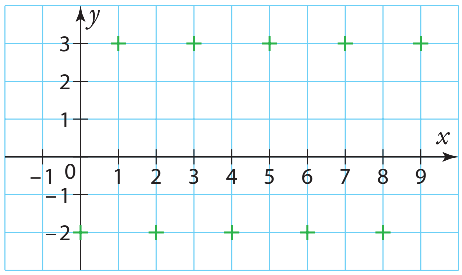
a)



b)



c)



84 Conjecturer, si elle existe, la limite des suites dont certaines valeurs sont données ci-dessous.

a) $u_1 = -1$, $u_{10} = -20$, $u_{1000} = -4\,000$, $u_{10000} = -5\,000$

b) $v_1 = 3$, $v_{10} = -2$, $v_{100} = 3$, $v_{1000} = -2$, $v_{10000} = 3$

c) $w_1 = -1$, $w_{100} = -1{,}95$, $w_{1000} = -1{,}98$, $w_{10000} = -1{,}99$

85 Conjecturer la limite des suites ci-dessous.

a) la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$

b) la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$

Calculs et automatismes

86 Pour chaque suite ci-dessous, calculer u_1 et u_5.

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 3$

b) (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n - 3$

87 Calculer les sommes suivantes.

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

b) $50 + 51 + \ldots + 100$

c) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 1\,024$

Généralités sur les suites

88 Pour chaque suite ci-dessous, calculer les quatre premiers termes.
a) (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + n^2$
b) (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = u_n \times u_{n+1}$

89 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.

90 Dans chaque cas, déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n, u_n prend la valeur 5.
a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 21$
b) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+26}{n+2}$

91 TICE Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 3$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	
3	1	
4	2	

Quelle formule rentrer dans la cellule B2 du tableur pour obtenir par recopie vers le bas les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?

92 TICE Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3n^2 + 2n - 5$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	
3	1	
4	2	

Quelle formule rentrer dans la cellule B2 du tableur pour obtenir par recopie vers le bas les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?

93 TICE Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	
4	2	

Quelle formule rentrer dans la cellule B3 du tableur pour obtenir par recopie vers le bas les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?

94 TICE Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n - n$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	2
3	1	
4	2	

Quelle formule rentrer dans la cellule B3 du tableur pour obtenir par recopie vers le bas les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?

95 Algo & Prog Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -u_n + 4$.
On considère l'algorithme suivant.

```
u ← 5
Pour i allant de 1 à 25
  u ← -u + 4
Fin pour
Afficher u
```

1. Que permet d'afficher cet algorithme ?
2. Quelle valeur affiche l'algorithme ?
3. Modifier cet algorithme pour qu'il affiche la valeur de u_{40}.

96 Algo & Prog Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer u_{20}.
3. En utilisant la calculatrice, donner la valeur de u_{20}.

97 Algo & Prog Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 1$.
On considère le programme en **Python** suivant.

```
L=[ ]
for i in range (0,20):
  L.append(3*i-1)
```

1. À quoi ce programme sert-il ?
2. À quel terme L[6] correspond-il ?
Donner la valeur de ce terme ?

98 Algo & Prog Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.
Écrire un programme en **Python** qui crée une liste avec les 30 premiers termes de la suite (u_n).

99 Algo & Prog Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n + 2$
On considère le programme en **Python** suivant.

```
L=[3]
for i in range (1,15):
  L.append(2*L[i-1]+2)
print(...)
```

Compléter ce programme pour qu'il affiche u_{10}.

100 Une entreprise d'impression de photos propose un abonnement annuel à ses clients qui coute 45 euros. Avec cet abonnement, le client paye 5 centimes par photo qu'il veut imprimer.
On note u_n le prix que paye le client pour l'abonnement et l'impression de n photos.
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Combien le client paye-t-il pour imprimer 15 photos ?
3. S'il a payé 98 euros, combien de photos a-t-il imprimées ?

101 On peut montrer que deux suites sont égales, en montrant qu'elles ont le même premier terme et qu'elles suivent la même relation de récurrence.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - 1$.
On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $\in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$.
On veut montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.
1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
2. Montrer que, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
3. Conclure.

102 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3n + 2$. **Algo & Prog**
On considère l'algorithme suivant.

```
S ← 0
Pour i allant de 0 à 20
  S ← S + (-3 × i + 2)
Fin pour
```

À quoi cet algorithme sert-il ?

103 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n + 1$. **Algo & Prog**
Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des 50 premiers termes de la suite (u_n).

```
U ← …
S ← 0
Pour i allant de … à …
  S ← …
  U ← …
Fin pour
```

Suites arithmétiques et géométriques

104 On s'intéresse à une échelle dont le premier barreau se trouve à une hauteur de 10 cm du sol.
Il y a ensuite 30 cm entre chaque barreau.

1. a) À quelle hauteur le deuxième barreau sera-t-il ?
b) À quelle hauteur le troisième barreau sera-t-il ?
2. On note u_n la hauteur par rapport au sol du n-ième barreau de l'échelle.
a) Déterminer la valeur de u_1.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

105 Un groupe d'enfants décide de construire la plus haute tour en briques possible.
La tour a initialement une hauteur de 40 cm. Chaque enfant rajoute à la tour un étage de 2 cm.
On note u_n la hauteur de la tour en cm après le passage de n enfants. On a $u_0 = 40$.
1. Déterminer la valeur de u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Quelle est la hauteur de la tour après le passage de 15 enfants.
5. Combien faut-il de passages pour que la tour mesure 1 m ?

106 Pour ses 10 ans, les parents de Marie lui achètent un petit coffre-fort et mettent 100 euros dedans. Puis tous les ans pour son anniversaire, ils lui donnent 50 euros à placer dans son coffre-fort.
On note u_n la somme dans le coffre-fort n années après ses 10 ans. On a $u_0 = 100$.
1. Exprimer u_n en fonction de n. Justifier.
2. Combien Marie a-t-elle dans son coffre-fort le lendemain de son 15e anniversaire ?
3. Déterminer à quel âge Marie aura 1 000 euros dans son coffre-fort.

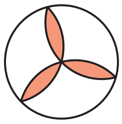
107 Yanis a une grande collection de poupées russes.

On s'intéresse à une série de poupées russes. La plus petite figurine mesure 1 cm de hauteur. Chaque poupée se trouve dans une poupée qui mesure 0,5 cm de plus qu'elle.
On note u_n la taille de la n-ième poupée (dans l'ordre croissant). On a donc $u_1 = 1$.
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Quelle est la taille de la 10e poupée ?
3. Si, au lieu d'emboîter les poupées on les empilait, quelle serait la hauteur d'une pile formée de 10 poupées ?

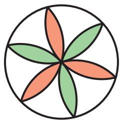
108 Aurélien décide de partir de Paris et d'aller à Stockholm en vélo. Il doit parcourir 2 000 km.
Le premier jour, il parcourt 20 km. Chaque jour, il parcourt 5 km de plus que le jour précédent.
On note u_n la distance parcourue le n-ième jour. Ainsi, $u_1 = 20$.
1. Quelle distance parcourt-il le deuxième jour ?
2. Exprimer u_n en fonction de n, en justifiant.
3. On note s_n la distance parcourue au total depuis le début du parcours, le n-ième jour au soir.
a) Déterminer la valeur de s_1 et de s_2.
b) Exprimer s_n en fonction de n.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de jours Aurélien aura parcouru les 2 000 km et sera arrivé à Stockholm.

Exercices d'entraînement

109 **Étape 0 :** Valentine trace une rosace à trois pétales.



Étape 1 : Elle décide de décorer davantage sa rosace et rajoute un pétale entre deux pétales consécutifs.



À chaque étape, elle rajoute chaque fois un pétale entre deux pétales consécutifs.
On note u_n le nombre de pétales à l'étape n.
On a $u_0 = 3$.
1. Tracer la rosace à l'étape 2.
2. En déduire la valeur de u_1 et u_2.
3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4. En déduire l'expression de u_n.

110 Carole et Nicolas font un tournoi de 5 mini-jeux sur un jeu vidéo. Carole obtient un score de 5 000 et Nicolas un score de 3 500. Nicolas décide alors de s'entraîner chaque semaine pour battre le record de Carole. Chaque semaine, il améliore son score de 5 %. Au bout de combien de semaines battra-t-il le record de Carole ?

111 Le 1er janvier 2019, Olivier veut déposer 5 000 euros sur un compte en banque.
Il a le choix entre deux propositions.
1. On lui propose un compte épargne avec des intérêts à taux fixe. Chaque année, le 31 décembre, la banque lui verserait 110 € sur son compte épargne.
On note u_n la somme sur le compte le 1er janvier 2019 + n.
a) Déterminer la valeur de u_0 et u_1.
b) Exprimer u_n en fonction de n en justifiant.
c) Combien aurait-il sur son compte en banque en 2040 ?
2. On lui propose un compte épargne avec des intérêts à taux composés. Chaque année, le 31 décembre, la banque lui verserait sur son compte épargne 2 % de la somme disponible sur le compte.
On note v_n la somme sur le compte le 1er janvier 2019 + n.
a) Déterminer la valeur de v_0 et v_1.
b) Exprimer v_n en fonction de n en justifiant.
c) Combien aurait-t-il sur son compte en banque en 2040 ?
3. S'il décide de laisser l'argent sur son compte pendant 5 ans, quelle offre est la plus intéressante ?
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années il est plus intéressant de choisir l'offre avec des intérêts à taux composés ?

112 Un artificier prépare son feu d'artifice, synchronisé sur de la musique.
Il décide de lancer une fusée pendant le premier extrait de musique, deux fusées pendant le deuxième extrait, trois pendant le troisième extrait, etc.
Chaque fusée lancée lui coûte 10 €.
1. Il décide de passer 15 extraits de musique.
Combien paiera-t-il ?
2. Il décide d'époustoufler les spectateurs et d'envoyer au moins 1 000 fusées. En utilisant la calculatrice, déterminer le nombre d'extraits de musique qu'il devra passer.
Combien paiera-t-il ?

113 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + 2$.
a) Calculer v_0.
b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

114 On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement.
À la fin 2019, le réseau compte exactement 600 personnes abonnées.
L'administrateur de la plateforme prévoit chaque année que 20 % des anciens abonnés ne se réabonnent pas, et que 2 000 nouvelles personnes s'abonnent.
On note u_n le nombre d'abonnés sur la plateforme en 2019 + n.
1. Combien y aura-t-il d'abonnés en 2020 ?
2. Donner la valeur de u_0 et u_1.
3. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 2\,000$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 10\,000$.
a) Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b) Déterminer la valeur de v_0.
c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
e) Combien d'abonnés l'administrateur prévoit-il en 2050 ?

115 Un parc d'attractions propose à ses visiteurs des pass annuels donnant un accès illimité à l'ensemble du site.
En 2019, 5 000 visiteurs achètent ce pass. Chaque année, le directeur du parc prévoit que 90 % de ces visiteurs renouvelleront leur pass et que 800 nouveaux visiteurs en achèteront un.
On note u_n le nombre de visiteurs ayant le pass annuel en 2019 + n.
1. Déterminer la valeur de u_0 et u_1.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 800$.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8\,000$.
a) Justifier que la suite (v_n) est géométrique.
b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Combien peut-on prévoir qu'il y aura de visiteurs détenteurs du pass annuel en 2030 ?

Variations et limite d'une suite

116 Étudier les variations des suites suivantes.
a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$
b) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n-1}}$

117 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^3 - n^2 + n$.
Étudier les variations de la suite (u_n).

2 Reconnaître et utiliser des suites arithmétiques et géométriques et calculer des sommes

QCM

Pour les exercices 165 à 167, on considère la suite (u_n) définie par $u_1 = -2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + 3$.

165 La valeur de u_2 est :

a 3 b 1 c 4 d 0

166 L'expression de u_n en fonction de n est :

a $u_n = -2 + 3n$ b $u_n = -2 \times 3^n$
c $u_n = -5 + 3n$ d $u_n = -1 + 3n$

167 La valeur de u_{10} est :

a 10 b 25 c 28 d 30

Pour les exercices 168 à 170, on considère la suite (v_n) définie par $v_0 = -6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = v_n \times 2$.

168 La valeur de v_1 est :

a -12 b -3
c 1 d 12

169 L'expression de v_n en fonction de n est :

a $v_n = -6 \times 2^n$ b $v_n = -6 \times 2^{n-1}$
c $v_n = -6 + 2^n$ d $v_n = 6 \times 2^{n-1}$

170 La valeur de v_{10} est :

a $-6\,144$ b $-3\,072$ c 10 d 14

171 Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 7$ et $u_4 = 1$. La raison de la suite est :

a -3 b 3 c 6 d 7

172 Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_2 = 1$ et $u_4 = 9$. La raison de la suite est :

a 9 b $\frac{9}{2}$ c 2 d 3

173 La somme $1 + 2 + 3 + \ldots + 37$ est à égale à :

a 666 b 703 c 741 d 1 406

174 La somme $1 + 3 + 5 + \ldots + 49 + 51$ est à égale à :

a 1 326 b 1 300 c 1 351,5 d 676

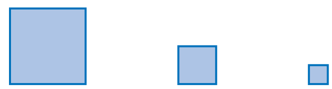
175 La somme $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{10}$ est à égale à :

a 88 573 b 29 524 c 88 574 d 44 287

176 ✶ En 2019, Myriam plante un arbre qui mesure 50 cm. Chaque année, l'arbre grandit de 2 cm. Quelle sera sa taille en 2041 ?

177 ✶ On considère un carré de côté 1 cm. À chaque étape, on divise les longueurs du côté du carré par 2.

Étape 0 **Étape 1** **Étape 2**



On note (c_n) la suite correspondant à la longueur des côtés à l'étape n. Ainsi $c_0 = 1$.

On note p_n le périmètre du carré à l'étape n, et a_n l'aire du carré à l'étape n.

1. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. En déduire l'expression de c_n.

2. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

178 ✶ Calculer les sommes suivantes.

a) $S = 60 + 61 + 62 + \ldots + 99 + 100$

b) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{14}$

c) La somme des 15 premiers termes de la suite arithmétique de raison $-0,5$ et de premier terme $u_0 = 4$.

d) $S = v_4 + v_5 + \ldots + v_{15}$ où (v_n) est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $-\frac{1}{9}$.

179 ✶ Lucia travaille dans une entreprise et gagne 2 500 € nets en 2019.

Son patron a décidé de lui augmenter tous les ans son salaire de 4 %.

1. Quel sera son salaire en 2020 ? en 2021?

2. On note u_n le salaire net de Lucia en $2019 + n$.

a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n en justifiant.

b) En déduire le salaire net de Lucia en 2030.

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer en quelle année le salaire de Lucia deviendra supérieur à 5 000 € nets.

180 ✶✶ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,2u_n - 40$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 200$.

1. Justifier que la suite (v_n) est géométrique.

2. Déterminer les variations de la suite (v_n)

3. Donner l'expression de v_n en fonction de n.

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Corrigés

1 Notion de liste

À vous de jouer !

1
```
L1=[21,32,37,8]
L2=[]
L2.append(L1[1])
print(L1)
print(L2)
```

3
```
L=[0,1,1,0,0]
M=[0,1,0]
N=L+M
N.sort()
```

5 On multiplie successivement `p` par tous les éléments de `L1`, on a donc successivement : `p=1` (initialisation) ; `p=1×1=1` ; `p=1×2=2` ; `p=2×3=6` ; `p=6×4=24` ; `p=24×5=120`.

7
```
L=[5,7,9,8,7]
for i in L:
    print(2*i)
```

9 `[7*i for i in range(0,101)]`

Exercices d'application

22
```
A=[42,78,103]
A[1]=4
print(2*A[2])
A.append(78)
```

29
```
del(L[2])
print(len(L))
L.sort()
```

33 **1.** Il affiche `5` (`L[0]×2`^{0}), `14` (`L[1]×2`^{1}), `32` (`L[2]×2`^{2}) et `96`(`L[3]×2`^{3}).
2. Le programme 2.

36 Le programme 1 ajoute successivement à `s` (initialisée à 0) les doubles des valeurs de la liste `A` donc, à la fin, `s` vaut $2+4+6+8=20$.
Le programme 2 concatène successivement à `p` (initialisée à « une ») un espace et les valeurs de la liste `B` donc, à la fin, il affiche `une jolie liste!`.

39
```
for x in L:
    print(4*x**3-12*x**2+7*x+3)
```

43 **a)** `L1=[i**3 for i in range(51)]`
b) `L2=[4*i for i in range(26)]`
c) `L3=[4*i for i in range(250,1000) if 4*i >= 1353 and 4*i <= 2711]` car on sait sans calcul que $4 \times 250 = 1\,000$ et $4 \times 999 = 4\,000 - 4 = 3\,996$ (mais on peut choisir d'autres valeurs que 250 et 1 000).

En autonomie

79 c **80** a
81 b **82** c

83
```
def zero(L):
    if 0 in L:
        exp="C'est nul"
    else:
        exp="C'est pas nul"
    return exp
```

84 `A=[36,49,64,81]`

85
```
L=[10,100,100]
L[2]=10*L[2]
L.insert(0,0)
L=L+[10000,100000]
```

86
```
def multiples(k,n):
    L=[]
    for i in range(n):
        L.append(k*i)
    return L
```

87
```
for i in range(len(L)):
    if L[i]<0:
        L[i]=0
```

88 **1.** Il affiche successivement :
```
0:4
1:2
2:0
```
2.
```
def effectifs2(L,n):
    E=[]
    for i in range(n+1):
        E.append(L.count(i))
    return E
```

89
```
def plus_grand(L):
    for i in range(0,len(L)-1):
        if L[i]>L[i+1]:
            print("plus grand")
        else:
            print("pas plus grand")
```

90 **1.** `[4]` **2.** `[5,6]`
3.
```
def mediane(L):
    if len(supp(L)) == 2:
        m=(L[0]+L[1])/2
    else:
        m=L[0]
    return m
```

91
```
T=[]
for i in range(101):
    if 11.2*i < 40+5.6*i:
        T.append(11.2*i)
    else:
        T.append(40+5.6*i)
```

92 b

93 **1.** 1 500, 2 300, 2 400, 3 100, 3 300
2. Cet algorithme convertit les valeurs d'une liste des kilomètres aux mètres et les affiche.
3.
```
dist=[1.5,2.3,2.4,3.1,3.3]
for d in dist:
    print(1000*d)
```

94 **1.** `[1,2,3,4,7,9]`
2. Cette fonction donne la liste (triée dans l'ordre croissant) constituée de l'union des ensembles dont les éléments sont dans les listes `A` et `B`.
3.
```
def inter(A,B):
    C=[]
    for i in A:
        if i in B:
            C.append(i)
    C.sort()
    return C
```

95 **1.** et **2.**
```
def image_affine1(X,a,b):
    for i in X:
        print(a*i+b)

def image_affine2(X,a,b):
    Y=[]
    for i in X:
        Y.append(a*i+b)
    return Y
```

96
```
def double(L,I):
    A=[]
    for i in L:
        if i not in I:
            A.append(i)
        else:
            A.append(2*i)
    return A
```

97 a et d **98** a et c

99 `[2**i for i in range(9)]`

100 `[math.sqrt(i) for i in range(301) if i<100 or i>=200]`

101 **1.** `A=[4*i for i in range(251)]`
2. `B=[10*i for i in range(101)]`
3. `C=[i for i in B if i in A]`
4. `D=[i for i in A if i not in B]`

2 Suites numériques

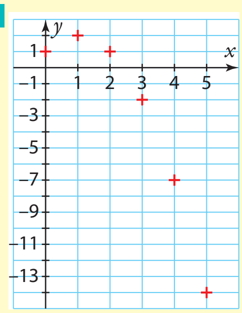
À vous de jouer !

1 $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 8$; $u_3 = 27$

3 **1.** $u_0 = 2$; $u_1 = 4$; $u_2 = 16$; $u_3 = 256$
2. $u_9 \approx 1{,}34 \times 10^{154}$

5 **1.** Il y aura 210 salariés en 2020 et 219 salariés en 2021.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.

7



9 **1.** $u_n = -2 + 3n$ **2.** $u_{20} = 58$

11 **1.** $u_n = -2 \times 2^n$ **2.** $u_{10} = -2\,048$

13 **a)** 11 325 **b)** 10 100

17 **1.** $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$
2. $u_{n+1} - u_n > 0$.
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

19 $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -5$

Exercices d'application

34 $u_0 = 3$; $u_1 = 5$; $u_2 = 7$

40 **1.** $u_1 = -9$; $u_2 = -17$
2. $u_{20} = -4\,194\,305$

45 $u_0 = -2$; $u_1 = 0$; $u_2 = 3$; $u_3 = 2$; $u_4 = -1$

50 $u_1 = 6$; $u_2 = 10$; $u_3 = 14$

61 $u_1 = -1$; $u_2 = 2$; $u_3 = -4$

70 **a)** $S = 120$ **b)** $S = 28$
c) $S = 92$ **d)** $S = 1\,254$

77 **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$.
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-4}{(n+2)(n+1)} < 0$
Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5^n \times (-4) < 0$.
Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

83 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -4$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
c) On conjecture que la suite (u_n) n'a pas de limite.

En autonomie

151 b **152** c **153** c
154 a **155** a **156** d
157 d **158** c **159** b

160 $u_0 = 4$; $u_1 = -1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 1$

161 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2 > 0$.
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

162 **a)** $u_0 = 1\,500$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 400$
b) On note u_n le prix que Camille paye pour assister à n cours. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 200 + 20n$.

163 **1.** $u_n = 2n$ **2.** $v_n = 30 + 0{,}5n$
3. $u_{50} = 100$ et $v_{50} = 55$
Si elle se fait livrer 50 fois dans l'année, alors l'abonnement B est le plus rentable.

164 **1.** $u_0 = 2$; $u_1 = -2$; $u_2 = 2$; $u_3 = -2$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 1}$

$$u_{n+2} = \frac{\dfrac{u_n - 4}{u_n - 1} - 4}{\dfrac{u_n - 4}{u_n - 1} - 1}$$

$$u_{n+2} = \frac{u_n - 4 - 4(u_n - 1)}{u_n - 4 - (u_n - 1)}$$

$$u_{n+2} = \frac{-3u_n}{-3}$$

$$u_{n+2} = u_n$$

3. Si n est pair, alors $u_n = u_0 = 2$.
Si n est impair, alors $u_n = u_1 = -2$.

165 b **166** c **167** b
168 a **169** a **170** a
171 a **172** d **173** b
174 d **175** a

176 $50 + 2 \times (2\,041 - 2\,019) = 94$
Il mesurera 94 cm.

177 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{2}$.
Donc (c_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = 1$.
Donc $c_n = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 4c_n = \dfrac{4}{2^n}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n^2 = \dfrac{1}{2^{2n}}$.

178 **a)** $S = 3\,280$ **b)** $S = 32\,767$
c) $S = 7{,}5$ **d)** $S = -2\,391\,480$

179 **1.** Son salaire en 2020 sera 2 600 € et en 2021 il sera 2 704 €.
2. a) $u_{n+1} = u_n \times 1{,}04$
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $u_0 = 2\,500$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\,500 \times 1{,}04^n$.
b) $u_{11} \approx 3\,848{,}64$
Son salaire en 2030 sera environ 3 848,64 €.
c) $u_{17} \approx 4\,869{,}75$ et $u_{18} \approx 5\,064{,}54$.
Donc son salaire deviendra supérieur à 5 000 € nets en 2019 + 18, soit 2037.

180 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 200$

$$= 1{,}2u_n - 40 - 200$$
$$= 1{,}2u_n - 240$$
$$= 1{,}2\left(u_n - \frac{240}{1{,}2}\right)$$
$$= 1{,}2(u_n - 200)$$
$$= 1{,}2v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.
2. $v_0 = u_0 - 200 = -196$
$1{,}2 > 1$. Or $v_0 < 0$.
Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -196 \times 1{,}2^n$.
4. Or $v_n = u_n - 200$
Donc $u_n = v_n + 200$
$u_n = -196 \times 1{,}2^n + 200$

3 Second degré

À vous de jouer !

1 **a)** $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$
b) $g(x) = 3(x - 2)^2 + 9$

3 **a)**

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		↘	$\frac{7}{4}$	↗	

b)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g		↗	33	↘	

5 **1. a)** $\Delta = -23$; $S = \varnothing$.
b) $\Delta = 0$; $S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.
c) $\Delta = 9$; $S = \{-1 ; 2\}$.
2. a) $\Delta = 225 > 0$. Donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes.
b) $f(1) = -6 \neq 0$. Donc 1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.
c) $S = \left\{\dfrac{1}{2} ; 3\right\}$

7 **1.** $\Delta = 992{,}25 > 0$.
Donc f admet deux racines distinctes.
2. $f(-4) = 0$. Donc -4 est une racine de f.
3. Le produit des racines est égal à -2.
L'autre racine de f vaut $\dfrac{1}{2}$.

11 **a)**

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	

Exercices d'application

27 **a)** Oui **b)** Non **c)** Non

31 **1.** $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$
2. $f(x) = (x + 2)^2 + 1$

36 **a)** Le sommet a pour coordonnées $(2 ; 1)$, l'axe de symétrie a pour équation $x = 2$ et $a < 0$.
b) Le sommet a pour coordonnées $(-1 ; -2)$, l'axe de symétrie a pour équation $x = -1$ et $a > 0$.

42 **a)** $f(x) = x \times (x + 5)$
b) $f(x) = 2x \times (x - 5)$

47 **a)** $\Delta = -4$ **b)** $\Delta = 49$
c) $\Delta = -40$ **d)** $\Delta = 16$

53 **1.** $f(-1) = 0$ et $f(5) = 0$
Donc -1 et 5 sont les racines de f.
2. $f(x) = 2(x + 1)(x - 5)$

59 **a)**

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2(x + 2)(x - 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$		$+$	0	$+$	
$-2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$		$-$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 + 5$		$+$	

En autonomie

131 c **132** c
133 c **134** d