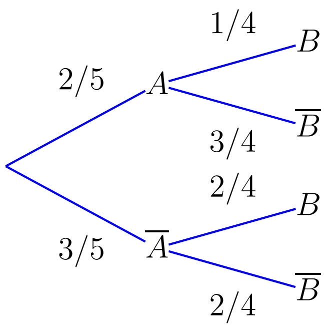
Exercice 1

Un sachet opaque contient deux bonbons au citron et trois bonbons à l'orange, indiscernables au toucher. On tire deux bonbons au hasard successivement sans remise. On note :

- A l'événement : "le premier bonbon tiré est au citron" ;
- B l'événement : "le deuxième bonbon tiré est au citron".

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-après.



2. L'événement $A \cap B$ est l'événement $\boxed{\text{“les deux bonbons tirés sont au citron”}}$. On calcule $P(A \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \boxed{0,1}$ (= 10%) sur la branche du haut de l'arbre.

3. L'événement B est sur la première et la troisième branche de l'arbre. $P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{8}{20} = \boxed{0,4}$.

4. Dans cette question, on sait que B est réalisé, et on demande la probabilité de A. Il faut donc calculer $P_B(A)$. On la calcule avec la formule $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \boxed{0,25}$.

Exercice 2

Dans une classe de 20 élèves, on veut choisir un groupe de 4 élèves.

L'ordre n'a pas d'importance : peu importe dans quel ordre on choisit les 4 élèves, si on choisit les 4 mêmes élèves, ça formera le même groupe. Si on choisit "Alice, Bob, Charles et Daria" dans cet ordre ou "Bob, Charles, Daria et Alice" dans cet ordre, dans les deux cas on obtient le même groupe.

Du coup, il s'agit d'un calcul de combinaison. Il s'agit d'une combinaison de 4 parmi 20, il y en a $C(20,4) = \frac{20!}{4! \cdot (20-4)!} = \frac{20!}{4! \cdot 16!}$ (c'est dans le formulaire). À la calculatrice : Menu -> Probabilités -> Combinaisons donne `nCr()`, il faut ensuite taper `nCr(20, 4)` ce qui donne $\boxed{4\ 845}$.

Exercice 3

Un digicode contient 10 touches différentes[1]. On souhaite former des codes de 5 caractères.

1. Nous avons 10 touches, et on veut former un code de 5 caractères (qu'on peut éventuellement répéter). Il y a donc $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5 = \boxed{100\ 000}$ codes différents.

[1] Leur valeur est sans importance pour les questions 1 à 3. Pour la question bonus on en a besoin, les touches sont : A, B, C, 0, 1, 2, 3, 4, 5, et 6.

2. Il s'agit d'un arrangement (les caractères doivent être tous différents et l'ordre a de l'importance : le code $AB123$ n'est pas le même que le code $12A3B$).

   On calcule $A(10,5) = \dfrac{10!}{(10-5)!} = \dfrac{10!}{5!}$ (c'est dans le formulaire) ou Menu -> Probabilités -> Arrangements donne `nPr()`, il faut ensuite taper `nPr(10, 5)` ce qui donne $\boxed{30\ 240}$.

   Remarque : on pouvait aussi écrire le calcul $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\ 240$ (10 choix pour le premier caractère, puis 9 choix pour le deuxième, 8 pour le troisième, 7 pour le quatrième et enfin 6 pour le cinquième et dernier caractère).

3. Dans cette question, on reconnaît que c'est le complémentaire de la question précédente. Effectivement pour un code il n'y a que deux possibilités : soit tous les caractères sont différents, soit il y en a au moins 2 identiques ! Du coup il suffit de soustraire les calculs faits aux 2 premières questions. On trouve $100\ 000 - 30\ 240 = \boxed{69\ 760}$.

BONUS On va commencer par trouver les codes qui contiennent 1 lettre puis 4 chiffres, et on va retirer ceux qui ont tous leurs chiffres égaux.

Il y a 3 lettres et 7 chiffres, donc au total $3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7\ 203$ codes à 1 lettre puis 4 chiffres. Parmi ces 7 203 codes, on a 21 codes où les 3 chiffres sont égaux :

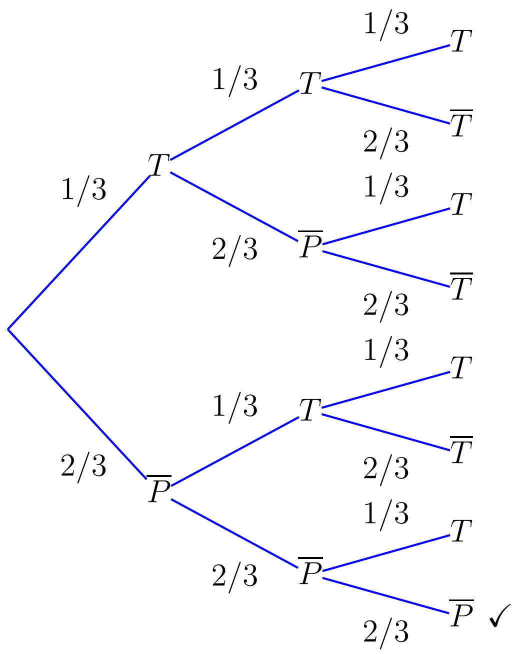
$$A000, A111, A222, \ldots, A666, B000, \ldots, B666, C000, \ldots, C666$$

Du coup il y a $\boxed{7\ 173}$ codes qui respectent les contraintes.

Exercice BONUS

On considère un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, bien équilibré. On lance ce dé 3 fois de suite. Quelle est la probabilité que l'on n'obtienne aucun nombre multiple de 3 ?

On peut faire un arbre pour cet exercice, exactement comme l'exercice 10 des exercices de révisions. On note T = "obtenir un multiple de 3" (2 nombres multiples de 3 sur 6 donc probabilité $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ à chaque lancer).



L'événement "aucun nombre multiple de 3" est donc uniquement sur la branche du bas, sa probabilité est $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \boxed{\dfrac{8}{27}}$.